Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Die folgenden Aufgaben habe ich zur Vorbereitung auf die Klausur zusammengestellt. Ich weiss nicht wie die Klausur aussieht und kann kein Garantie auf Vollstaendigkeit geben. Etwa enthaelt dieses Dokument keine Aufgaben zu Kapitel 5 und nur wenige zu Kapitel 6 der Vorlesung. Diese sind allerdings auch Klausurrelevant. -Iason

Aufgabe 1 *Ein Passwortmanager generiert Passwörter bestehend aus* 12 *Großbuchstaben des lateinischen Alphabets. Aus den* 26 *Buchstaben wird dabei gleichverteilt gezogen.*

a) *Gib den Ergebnisraum Ω und das dazugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ an, die zu diesem Prozess gehören. Ist Ω diskret?*

b) *Es bezeichne A das Ereignis, dass sich in einem Passwort kein Buchstabe wiederholt. Beschreibe genau, welche Elemente aus Ω zu A gehören. Berechne $\mathbb{P}(A)$.*

Aufgabe 2 *Aus einer Urne mit* 5 *weißen und* 3 *schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.*

a) *Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln weiß sind.*

b) *Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine Kugel schwarz ist.*

c) *Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel schwarz ist.*

d) *Sind die Ereignisse*

$$A = \textit{Die erste Kugel ist weiß}, \quad B = \textit{Die zweite Kugel ist weiß}$$

unabhängig?

Aufgabe 3 *Ein Café bietet n verschiedene Sorten von Eistee an. Ein Kunde möchte insgesamt $k \geq n$ Flaschen kaufen. Wie viele Möglichkeiten gibt es (ohne Reihenfolge), wenn der Kunde von jeder Sorte mindestens eine Flasche kauft?*

Aufgabe 4 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \subseteq \Omega$ drei Ereignisse.*

a) *Zeige das (bereits aus der Vorlesung bekannte) Resultat*

$$\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

anhand der Axiome eines Wahrscheinlichkeitsraumes.

b) *Seien A, B, C jeweils paarweise disjunkt. Beweise oder widerlege*

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C).$$

c) *Finde eine Formel für die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B \cup C$ anhand der Wahrscheinlichkeiten von $A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C$ und $A \cap B \cap C$.*

d) *Beweise oder widerlege: Angenommen A, B und C sind jeweils paarweise stochastisch unabhängig, dann sind auch $A \cup B$ und C stochastisch unabhängig.*

Aufgabe 5 *In einer Stadt gibt es drei Taxifirmen: Gelb, Grün und Blau. Der Marktanteil der Firmen beträgt:*

$$\mathbb{P}(G) = 0{,}5, \quad \mathbb{P}(Gr) = 0{,}3, \quad \mathbb{P}(B) = 0{,}2,$$

wobei G, Gr, B die Ereignisse bezeichnen, dass ein Taxi zur gelben, grünen bzw. blauen Firma gehört.

Nach einem Unfall gibt ein Augenzeuge an, ein grünes Taxi gesehen zu haben. Es ist bekannt, dass Zeugen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 die Farbe korrekt erkennen. Die Wahrscheinlichkeit, eine falsche Farbe anzugeben, wird gleichmäßig auf die anderen beiden Farben verteilt.

a) *Definiere geeignete Ereignisse zur formalen Beschreibung der Situation.*

b) *Berechne die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Taxi tatsächlich grün war, gegeben, dass der Zeuge ein grünes Taxi angibt.*

c) *Wie ändert sich das Ergebnis (qualitativ), wenn die Zeugen nur mit Wahrscheinlichkeit 0,6 die Farbe richtig erkennen?*

Aufgabe 6 *Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit*

$$\mathbb{E}[X] = 2, \quad \mathbb{E}[Y] = 3, \quad \mathrm{Var}(X) = 4, \quad \mathrm{Var}(Y) = 1.$$

Wir definieren eine neue Zufallsvariable

$$Z = 5X - 2Y + 7.$$

a) *Berechne $\mathbb{E}[Z]$ und $\mathrm{Var}(Z)$.*

b) *Berechne die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von Y und Z.*

Aufgabe 7 *Gegeben sei die Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} kx(2-x), & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) *Bestimme die Konstante k, sodass $f(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist.*

b) *Bestimme die Verteilungsfunktion F, die zu f gehört.*

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(0{,}5 \leq X \leq 1{,}5)$.

d) Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$.

e) Berechne die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

f) Überprüfe, ob $f(x)$ *achsensymmetrisch um seinen Erwartungswert ist.*

Aufgabe 8 *Die Zufallsvariable* X *hat die Dichte*

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & \textit{für } x \geq 0, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, dass f *eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist.*

b) Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$.

c) Berechne die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 9 *Eine Zufallsvariable* X *folgt einer Poisson-Verteilung mit unbekanntem Parameter* $\lambda > 0$*:*

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Es wird eine einzelne Beobachtung $X = 4$ *gemacht. Berechne den Maximum-Likelihood-Schätzer* $\hat{\lambda}_{\mathrm{MLE}}$ *für* λ.

Aufgabe 10 *Eine Zufallsvariable* X *sei exponentialverteilt mit unbekanntem Parameter* $\lambda > 0$*, d. h.*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Es wird eine Beobachtung $X = x_0$ *gezogen. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer* $\hat{\lambda}_{\mathrm{MLE}}$ *für* λ.

Aufgabe 11 *Eine Zufallsvariable* X *folgt einer Bernoulli-Verteilung mit unbekanntem Parameter* $p \in (0, 1)$*:*

$$f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}.$$

Es werden $n + 1$ *unabhängige Beobachtungen* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *gemacht. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer* $\hat{p}_{\mathrm{MLE}}$ *abhängig von den Beobachtungen.*

Aufgabe 12 *Gegeben sei eine stetige Zufallsvariable* X *mit der Dichtefunktion*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimme die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

b) Berechne den Median und den Erwartungswert von X.

c) Berechne die Varianz von X.

d) Berechne die Schiefe von X (mit einem Taschenrechner).

Hinweis: *In der Klausur darf kein Taschenrechner verwendet werden.*

Aufgabe 13 *Die Lebensdauer (in Stunden) einer Maschine sei eine Zufallsvariable X mit Erwartungswert*

$$\mu = 1000$$

und Varianz

$$\sigma^2 = 40000.$$

Es sind keine weiteren Informationen über die Verteilung bekannt.

a) Bestimme eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass X um mehr als 400 Stunden vom Erwartungswert abweicht.

b) Bestimme daraus eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen 600 und 1400 liegt.

Aufgabe 14 *Gegeben sei eine stetige Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion*

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

b) Berechne das vierte zentrale Moment $\mu_4 = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^4\big]$.

c) Berechne die Kurtosis.