

Klausur

im Modul Mathematik 2

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

1. Hinweis: Dieses Deckblatt wird erst auf Anweisung der Aufsichtsführenden umgeblättert. Danach beginnt die Bearbeitungszeit.
2. Bearbeitungszeit: 120 Minuten
3. Zugelassene Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer, nichtgrafikfähiger Taschenrechner
4. Bewertungskriterien: Insgesamt sind 100 Punkte erreichbar. Mindestanforderung: 49 Punkte ($\hat{=}$ Note 4,0).
5. Arbeitsanweisung
 - a) Name, Vorname und Matrikelnummer sind auf diesem Deckblatt einzutragen.
 - b) Diese Klausur wurde maschinell gelegt. Prüfen Sie daher die fortlaufende Nummerierung der Seiten.
 - c) Die Lösungen zu den Aufgaben sind auf der jeweiligen Seite und Rückseite einzutragen.
 - d) Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit Ihrer Lösungen.

Viel Erfolg!

Vom Prüfenden auszufüllen!

Punkte / Note / Handzeichen / Datum

1	2	3	4	5	6	7	8	B	Σ
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----------

Aufgabe 1. Bearbeiten Sie **alle** Teilaufgaben.

- a) Geben Sie eine Reihe an, die konvergent aber nicht absolut konvergent ist. (10 Punkte)
- b) Zeigen Sie, dass jede absolut konvergente Reihe auch konvergiert. (10 Punkte)

Aufgabe 2. Bearbeiten Sie **alle** Teilaufgabe.

a) Bestimmen Sie alle vierten Wurzeln von $z = 1 + \sqrt{3}i$. (10 Punkte)

Erinnerung: Die n -ten Wurzeln von 1 sind $e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot k}$ für $k = 0, 1, \dots, n$

b) Stellen Sie $z = \frac{1}{1+\sqrt{3}i}$ in der Form $a + bi$ dar. (10 Punkte)

Aufgabe 3. Bearbeiten Sie **eine** Teilaufgabe.

(10 Punkte)

- a) Entwickeln Sie $\sin(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 3\pi/2$ in eine Potenzreihe.
- b) Bestimmen Sie das vierte Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$ der Funktion

$$f(x) = \cos(2x - \pi) - 2x - 1.$$

Geben Sie dabei alle Koeffizienten in möglichst einfacher Form an. Sie müssen allerdings Klammern der Form $(x - x_0)^k$ nicht ausmultiplizieren.

Aufgabe 4. Bearbeiten Sie **eine** Teilaufgabe.

(10 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-1}^1 x^2 \exp(2x) dx.$$

b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-1}^1 2x \exp(x^2) dx.$$

Aufgabe 5. Bearbeiten Sie **eine** Teilaufgabe.

(10 Punkte)

a) Überprüfen Sie die beiden folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

b) Zeigen Sie, ist $a_n \geq 0$ und konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a , so konvergiert die Folge $(\sqrt{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen \sqrt{a} .

Aufgabe 6. Bearbeiten Sie **eine** Teilaufgabe.

(10 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass $f(x) = x^2 + 1$ stetig in $x_0 = 0$ ist.
- b) Finden Sie ein $c \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & , \text{ falls } x < a \\ c & , \text{ sonst} \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 7. Sei $f: [a,b] \rightarrow [a,b]$ stetig. Zeigen Sie: Die Funktion

$$\begin{aligned} h(x): [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - x \end{aligned}$$

hat eine Nullstelle. (10 Punkte)

Aufgabe 8. Bearbeiten Sie **eine** Teilaufgaben.

(10 Punkte)

- a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $a_n = \frac{n+\sin(n^2)}{n+\cos(n)}$.
- b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $b_n = n \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c}{n}}\right)$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

Bonusaufgabe:

Wir haben in der Gaußschen Zahlenebene einen Schatz (10 Punkte) am Punkt s versteckt. Nehmen Sie an, es befindet sich ein kleiner Busch im Ursprung und eine große Eiche im Punkt $y = 84i$. Außerdem ist im Punkt x ein rotes Kreuz auf den Boden gezeichnet. Einer Schatzkarte entnehmen Sie den Weg zum Punkt s :

- Gehen Sie vom Kreuz zum Busch und merken Sie sich die Länge l_1 dieser Strecke.
- Gehen Sie nochmals um die Länge l_1 vorwärts.
- Drehen Sie sich nach links (im rechten Winkel) und gehen Sie nochmals um die Länge l_1 vorwärts.
- Markieren Sie Ihre Position mit z_1 .
- Begeben Sie sich zur Eiche, gehen von dort zum Kreuz und merken Sie sich die Länge l_2 dieser Strecke.
- Drehen Sie sich nach links (im rechten Winkel) und gehen Sie nochmals um Länge l_2 vorwärts.
- Markieren Sie Ihre Position mit z_2 .
- Der Punkt s befindet sich in der Mitte der Punkte z_1 und z_2 .

Leider hat es geschneit und die Position des Kreuzes auf dem Boden ist derzeit nicht auffindbar. Berechnen Sie dennoch s .