Mathematik 2: Analysis
(Notizen zur Vorlesung)

Prof. Dr. Anastasios Stefanou*

ALTA Insitute, MZH, Universität Bremen

Sommersemester 2023

*Email: stefanou@uni-bremen.de

Disclaimer: Diese Notizen sind ‘Work in progress’. Es können Fehler oder Ungenauigkeiten enthalten sein.

Danksagung: Der Autor dankt Dr. Tim Haga, Prof. Dr. Dmitry Feichtner-Kozlov, Eduard Schreiner und Melanie Zedler für ihre Hilfe.

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung

In dieser Lektion werden wir eine Wiederholung von Mathematik 1 vornehmen.

Definition 1.1. Die Mengen

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ heißt Menge der natürlichen Zahlen.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ heißt Menge der ganzen Zahlen.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ heißt Menge der rationalen Zahlen.

Wir haben $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Addition und Multiplikation von rationalen Zahlen sind folgendermaßen definiert:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + q_2 q_1}{q_1 q_2}$$
$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}.$$

Für jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$, mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, p heißt Zähler und q heißt Nenner. Es gilt:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow p \cdot s = r \cdot q.$$

Z.B.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \text{ denn } 3 \cdot 4 = 12 = 2 \cdot 6.$$

Satz 1.2. Es gibt eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

Beweis. (Diagonale Argument) Hilfsabbildung ψ :

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{1}{2} \arrow[dl] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{1}{4} \arrow[dl] & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{2}{1} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{2}{4} \arrow[ur] & \frac{2}{5} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{3}{1} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{3}{4} \arrow[dl] & \frac{3}{5} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} \arrow[ur] & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} \arrow[ur] & \frac{4}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(0) &= 0 \\
\varphi(1) &= \psi(0) \\
\varphi(2) &= -\psi(0) \\
\varphi(3) &= \psi(1) \\
\varphi(4) &= -\psi(1) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

□

Satz 1.3 (Satz von Euklid ($\sim$ 300 v.Chr.))**.**
Es gibt keine rationale Zahl, $\sqrt{2}$, deren Quadrat gleich 2 ist.

Aber wir können die Zahl $\sqrt{2}$ annähern, z.B.:

$$\frac{14142}{10000} < \sqrt{2} < \frac{14143}{10000}, \text{ usw.}$$

Definition 1.4. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen besteht aus den rationalen Zahlen und aus Zahlen, die sich beliebig genau durch rationale Zahlen 'approximieren' lassen.

- Reelle Zahlen, die nicht rational sind, nennt man irrationale Zahlen.
- Zwei der wichtigsten und zugleich bekanntesten irrationalen Zahlen sind die Eulersche Zahl $e \cong 2.71828$ und die Kreiszahl $\pi \cong 3.14159$.
- $(\mathbb{R}, +\cdot)$ ist ein Körper.

Definition 1.5. Für $b \geq 0$, $n \in \mathbb{R}$, die Zahl b^n heißt die n-te Potenz von b, b heißt die Basis und n der Exponent von b. Wenn $b^n = a$ für $a, b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, so heißt b die n-te Wurzel von a. Man schreibt $b = \sqrt[n]{a}$ oder auch $b = a^{1/n}$, und b ist für jede positiv reelle Zahl a eindeutig bestimmt.

Beispiel 1.6.

$$a)\ \sqrt[4]{16} = 16^{1/4} = 2 \qquad b)\ \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Satz 1.7 (Rechenregeln für Potenzen)**.** Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \qquad a^0 = 1.$$

Beispiel 1.8.

$$a)\ (a^{1/2})^6 = a^3, \qquad b)\ 2^3 \cdot 2^5 \cdot 3^8 = 2^8 \cdot 3^8 = 6^8.$$

Definition 1.9. Der Absolutbetrag oder kurz Betrag einer reellen Zahl a ist definiert durch $|a| = a$ falls $a \geq 0$, und $|a| = -a$ falls $a < 0$.

Beispiel 1.10.

$$a)\ \ |3| = 3, \qquad b)\ \ |-3| = -(-3) = 3.$$

Satz 1.11 (Dreieckungleichung)**.** Für zwei beliebige reelle Zahlen a und b gilt:

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Für $a \geq 0$ hat man:

- $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ oder $x = -a$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ oder $x \leq -a$.

Wir fuhren folgende Kurzschreibweisen für bestimmte Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein:

Definition 1.12. Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ heißt abgeschlossenes Intervall,
$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ und
$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ heißen halboffenes Intervall,
$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ heißt offenes Intervall.

Spezialfälle sind unendliche Intervalle:

$$\begin{aligned}
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
(-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq x\} \\
(-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.
\end{aligned}$$

Beispiel 1.13. Finden Sie die Mengen: $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 5\}$ und $N = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5\}$.

Lösung Erste finden wir die Menge: $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 5\}$. Wir haben:

$$x^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{5} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{5} \Leftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \Rightarrow M = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

Dann $N = M \cap \mathbb{Z} = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \cap \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Definition 1.14.

- Eine Relation $R \subset M \times M$ heißt Halbordnung auf M, falls
  i) (Reflexivität) $\forall x \in M$, $(x,x) \in R$.
  ii) (Antisymmetrie) $\forall x, y \in M$, $(x,y), (y,x) \in R \Rightarrow x = y$.
  iii) (Transitivität) $\forall x, y, z \in M$, $(x,y), (y,z) \Rightarrow (x,z) \in R$.

- Eine Halbordnung wird bezeichnet mit $\leq$.
- Eine Halbordnung auf M heißt totale Ordnung, wenn für alles $a, b \in M$, $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt.

Beispiel 1.15. Die Standardrelation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist eine totale Ordnung auf $\mathbb{R}$.

Definition 1.16. Sei M ein halbgeordnete Menge mit Halbordnung $\leq$.
Eine Teilmenge $T \subset M$ heißt:

- nach unten beschrankt, wenn es ein $r \in T$ gibt, sodass $r \leq x$, für alle $x \in T$. r heißt untere Schranke von T. Die größte untere Schranke von T heißt Infimum von T, symbolisch $\inf T$.
- nach oben beschrankt, wenn es ein Element $r \in T$ gibt, sodass $x \leq r$, für alle $x \in T$. r heißt obere Schranke von T. Die kleinste obere Schranke von T heißt Supremum von T, symbolisch $\sup T$.

Beispiel 1.17. Beides gilt für $T \subset \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$):

$$\inf T = -\sup(-T), \text{ wobei } -T := \{-x \mid x \in T\}.$$

Bemerkung 1.18.

- Supremum und Infimum müssen nicht in der Menge T liegen.
  z.B.: $T = (3, 4) \subset \mathbb{R}$. $\sup T = 4 \notin T$.
- Gilt $\sup T \in T$, so heißt Maximum von T.
- Gilt $\inf T \in T$, so heißt Minimum von T.
- Merke: Weder $\max, \min, \sup$ oder $\inf$ für eine Menge müssen existieren.

2 Polynome, Rationale, Potenz und Exponential Funktionen

In dieser Lektion sprechen wir über Polynome, Rationale, Potenz, und Exponential Funktionen.
Zunächst müssen wir die Definition einer Funktion formulieren.

Definition 2.1. Eine Abbildung oder Funktion $f : D \to M$ zwischen Mengen D, M ist eine Relation $f \subset D \times M$ für die gilt:

i) f ist linkstotal, das heißt:

$$(\forall x \in D)\,(\exists y \in M)\,((x, y) \in f)\,.$$

ii) f ist rechtseindeutig, das heißt:

$$\text{Gilt } (x, y) \in f \text{ und } (x, z) \in f \text{ dann ist } y = z.$$

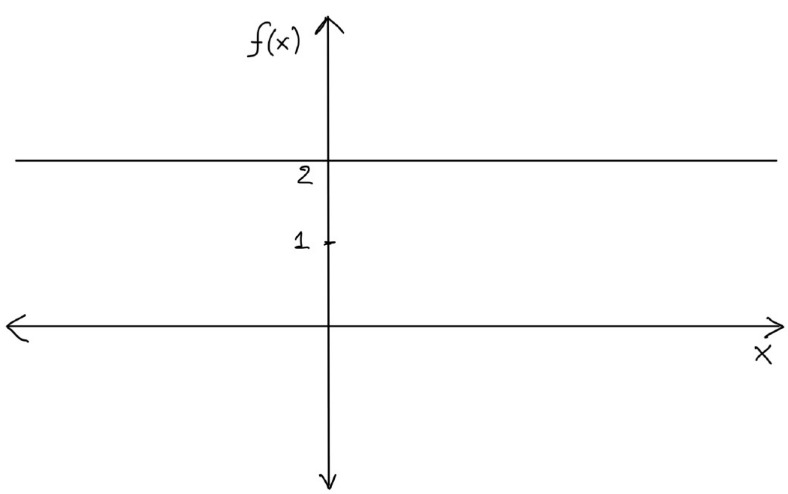
Man schreibt:

$$f(x) = y \Leftrightarrow (x, y) \in f.$$

Definition 2.2. Eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$

für einige $c \in \mathbb{R}$, heißt konstante Funktion.
Sie nimmt für jedes Argument x denselben Funktionswert $f(x) = c$ an.

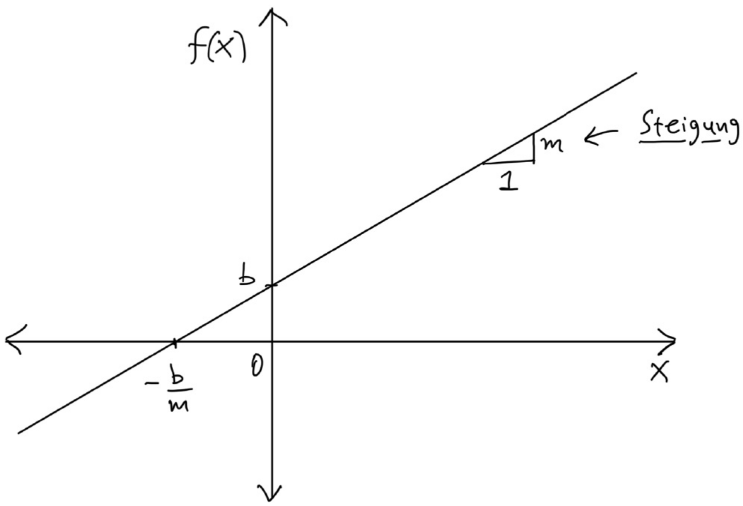


konstante Funktion $f(x) = 2$.

Definition 2.3. Eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto mx + b \end{aligned}$$

für einige $m, b \in \mathbb{R}$, heißt <u>lineare</u> oder <u>Gerade Funktion</u>.



lineare Funktion $f(x) = m\,x + b$

- Der Funktionsgraph eines solchen Funktiones ist eine <u>Gerade</u>.
- Wenn $m = 0$, $f(x) = b$ ist konstante Funktion.
- Eine lineare Funktion mit $m \neq 0$ hat immer eine Nullstelle (es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass $f(x_0) = 0$). Das ist, $x_0 = -\dfrac{b}{m}$.

Beispiel 2.4. Bestimmen Sie die Gerade f, die durch $f(2) = 2$ und $f(4) = 3$ bestimmt ist.

Lösung

- Es ist $f(x) = mx + b$.
- Um die Steigung m zu berechnen, werten wir den Quotienten ”vertikale Differenz/horizontale Differenzän den beiden gegeben Punkten aus:

$$m = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{1}{2}.$$

- Um b zu berechnen, brauchen wir nun nur noch einen Punkt zu kennen, z.B.

$$f(2) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}(2) + b \Rightarrow b = 1.$$

- Somit lautet die gesuchte Gerade $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Definition 2.5. Eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n \end{aligned}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, heißt Polynom.

- Die reellen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heißt die Koeffizienten des Polynoms.
- Unter der Voraussetzung an $a_n \neq 0$ nennt man $n = \mathbf{grad}(f)$ den Grad (engl. degree) von f.
- Der Koeffizient a_n heißt den höchsten Koeffizienten.
- Ein Polynom mit $a_n = 1$ (auf eins) normiert.

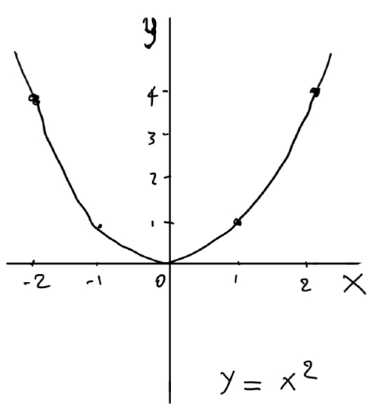
Bemerkung 2.6.

- Auch die identisch verschwindende Funktion, $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, kann als Polynom aufgefasst werden. Damit unsere Formeln auch in diesem Fall richtig bleiben, ordnet man diesem Polynom den Grad $-\infty$ zu.
- Sind f, g Polynome mit $n = \mathbf{grad}(f)$ und $m = \mathbf{grad}(g)$ so gelten

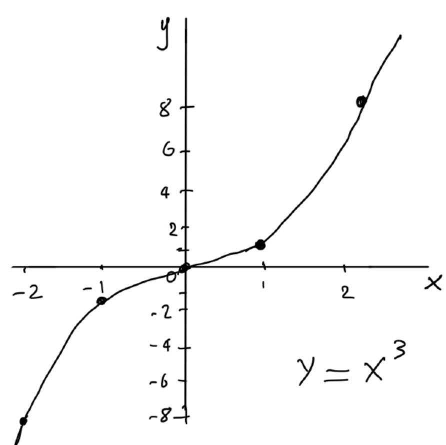
$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(f+g) &= \max\{n, m\}, \text{ und} \\ \mathbf{grad}(f \cdot g) &= n + m. \end{aligned}$$

- Die konstanten Funktionen und die linearen Funktionen sind Polynome.
- Ein Polynom vom Grad 2, $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ heißt auch quadratische Funktion. Der Funktionsgraph eines solchen Polynoms ist eine Parabeln.

Satz 2.7. Jedes nichtkonstante Polynom ist unbeschrankt.



x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



x	-2	-1	0	1	2
y	-8	1	0	1	8

Bemerkung 2.8. Die Nullstellen eines Polynoms vom Grad 2 sind die Losungen x_1, x_2 der quadratischen Gleichung.

$$x^2 + px + q = 0.$$

(Man kann jede quadratische Gleichung $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ mit $a_2 \neq 0$ auf diese Form bringen, indem man beide Seite durch a_2 dividiert).

Man hat

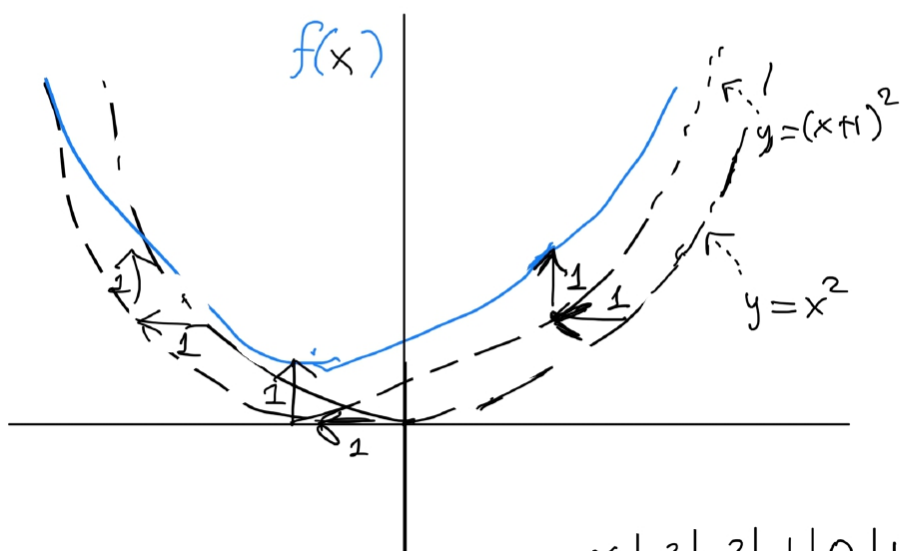
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

- Für $p^2 - 4q > 0$ gibt es zwei verschiedene reelle Nullstellen.
- Für $p^2 - 4q = 0$ fallen beide reellen Nullstellen zusammen.
- Ist $p^2 - 4q < 0$, so gibt es keine reellen, aber zwei zueinander konjugierte komplexe Nullstellen.

Man kann der Funktionsgraph von $f(x) = x^2 + px + q$ drücken mithilfe von $g(x) = x^2$:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right).$$

Beispiel 2.9. Man hat $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$.



x	-3	-2	-1	0	1
y	5	2	1	2	5

$$y = f(x) = x^2 + 2x + 2 = (\underbrace{x+1}_{\text{(links)}})^2 + \underbrace{1}_{\text{(über)}}$$

Wenn $p^2 - 4q \geq 0$, dann $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

Für ein Polynom, können wir entscheiden, ob eine reelle Zahl eine Wurzel ist. Wir können darauf spekulieren, dass eine Zahl x_0 eine Wurzel von $p^2 + px + q$ ist, wenn $(x^2 + px + q) : (x - x_0)$ auch ein Polynom ist.

Satz 2.10 (Polynomdivision)**.** Sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit $\mathbf{grad}(p) \leq \mathbf{grad}(p)$, dann gibt es Polynome $s(x)$ und $r(x)$, sodass $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$. Der Grad von $s(x)$ ist die Differenz $\mathbf{grad}(s) = \mathbf{grad}(p) - \mathbf{grad}(q)$ und $\mathbf{grad}(r) < \mathbf{grad}(q)$.

Beispiel 2.11. Berechnen Sie $(3x^4 + x^3 - 2x) : (x^2 + 1)$.

Lösung Wir schreiben

$$(3x^4 + x^3 - 2x) : (x^2 + 1) =$$

an und gehen ähnlich wie bei der Division zweier Zahlen vor: Womit muss die höchste Potenz von $q(x)$, also x^2, multipliziert werden, um auf die höchste Potenz von $p(x)$, also $3x^4$, zu kommen? Die Antwort $3x^2$ wird rechts neben das Gleichheitszeichen geschrieben. Dann wird das Polynom $(x^2 + 1)$ mit $3x^2$ multipliziert, das Ergebnis $3x^4 + 3x^2$ wird unter $(3x^4 + x^3 - 2x)$ geschrieben und davon abgezogen. Es bleibt der Rest $x^3 - 3x^2 - 2x$, mit ihm verfährt man gleich weiter

$$(3x^4 + x^3 - 2x) : (x^2+1) = \underbrace{\underset{1}{3x^2} + \underset{2}{x} - \underset{3}{3}}_{s(x)}$$

Quotientpolynom.

$$\begin{array}{llllll}
 & (3x^4 & +x^3 & & -2x &) \\
(-) & 3x^4 & & +3x^2 & & 1 \\
\hline
 & & x^3 & -3x^2 & -2x & \\
 & (-) & x^3 & & +x & 2 \\
\hline
 & & & -3x^2 & -3x & \\
 & & (-) & -3x^2 & -3 & 3 \\
\hline
 & & & & -3x+3 &
\end{array}$$

Restpolynom $r(x)$

Also $p(x) = (x^2 + 1)(3x^2 + x - 3) + (-3x + 3)$.

Satz 2.12. Jedes Polynom $p(x)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ (mit reellen oder sogar (mit komplexen Koeffizienten) kann in der Form

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - x_j) = a_n (x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

geschrieben werden, wobei $x_i \in \mathbb{C}$ sind.

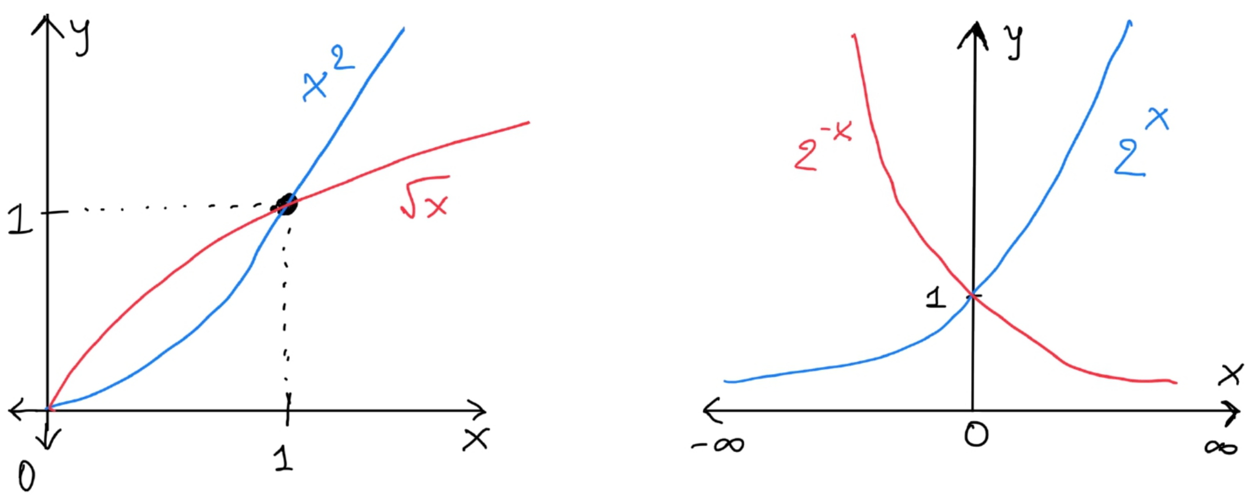
Potenz- und Exponential Funktionen

Wir fahren nun mit den Definitionen von Potenz- und Exponential Funktionen.

Definition 2.13.

- Eine Funktion der Form $f(x) = x^b$ mit $b \in \mathbb{R}$, $x > 0$ heißt Potenzfunktion.
- Eine Funktion der Form $f(x) = a^x$ mit $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ heißt Exponentialfunktion.

Beispiel 2.14.



Wenn die Basis $a = e \cong 2.718$ ist, es heißt die natürliche Basis.

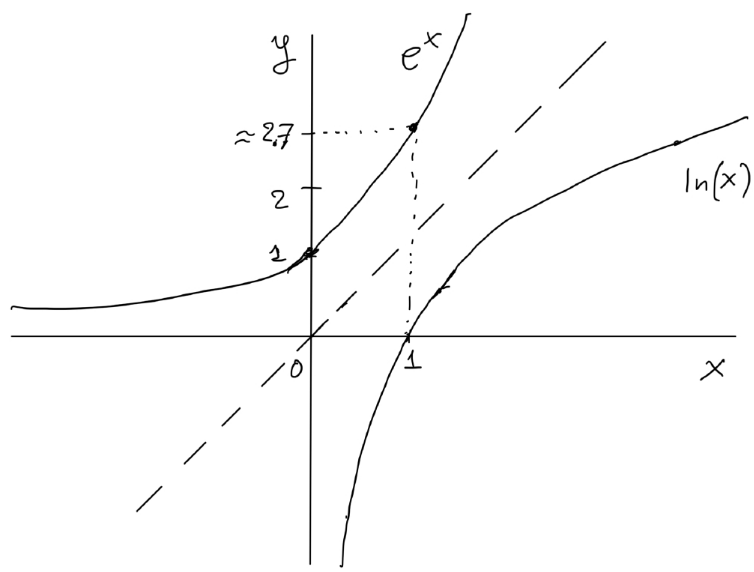
Wir werden gleich sehen, dass sich die Funktion a^x immer mithilfe der e^x lässt.

3 Logarithmus, Hyperbolische und Trigonometrische Funktionen

In dieser Lektion sprechen wir über Logarithmus, hyperbolische und trigonometrische Funktionen.

Definition 3.1. Sei $a > 0$, $a \neq 1$.

- Die Umkehrfunktion zu $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, heißt Logarithmus (Funktion) zur Basis a. Man schreibt $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ für $x > 0$.
- Die Umkehrfunktion speziell zu geschrieben und heißt natürliche Logarithmus.



Definition 3.2 (Rechenregeln für Logarithmus)**.**

- $\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$
- $\log_a(a^x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$
- $a^{\log_a(x)} = x$ für $x > 0$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $x, y > 0$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$, $x, y > 0$
- $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$, $r \in \mathbb{R}$.
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$.

Beispiel 3.3.

a) Verwenden Sie Logarithmen zum Auswerten $\log_2(80) - \log_2(5)$.

b) x finden, wenn $\ln(x) = 5$.

Lösung

a) $\log_2(80) - \log_2(5) = \log_2\left(\dfrac{80}{5}\right) = \log_2(16) = \log_2(2^4) = 4$.

b) $\ln(x) = 5 \Leftrightarrow x = e^5$.

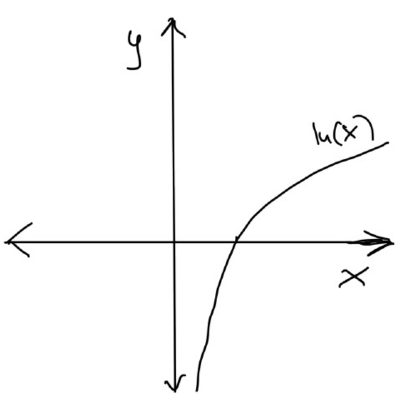
Satz 3.4.

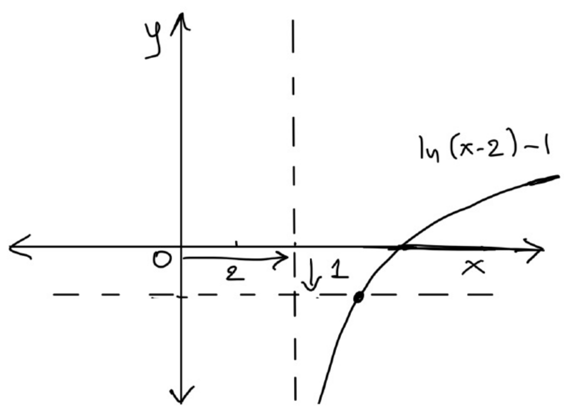
- Eine Exponentialfunktion mit beliebiger Basis $a > 0$ kann als Exponentialfunktion mit basis e ausgedruckt werden:
$$a^x = e^{x \ln(a)}.$$
- Analog kann eine Logarithmusfunktion mit beliebiger Basis mithilfe des natürlichen Logarithmus dargestellt werden:
$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Beispiel 3.5.

a) $\log_8(5) = \dfrac{5}{8} \cong 0.773976$.

b) Wir können den Funktionsgraph von $f(x) = \ln(x-2) - 1$ mithilfe von $g(x) = \ln(x)$ skizzieren.





x	1	e
y	0	1

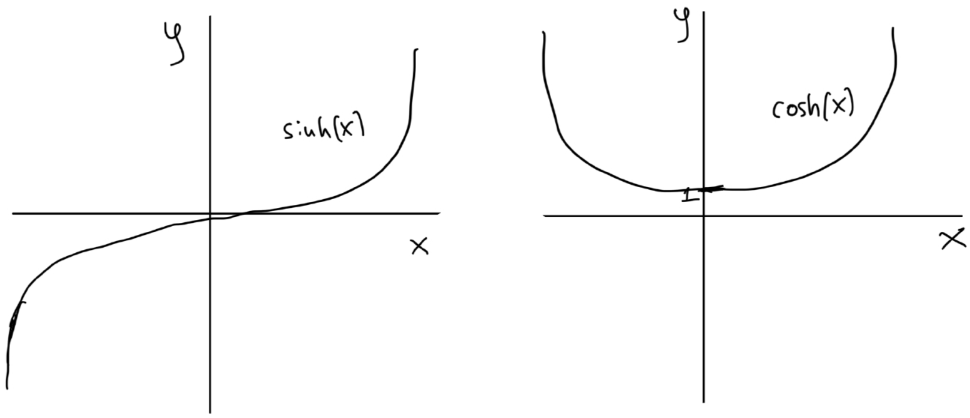
x	3	2+e
y	-1	0

In reellen Anwendungen trifft man auf folgende Funktionen.

Definition 3.6. Die Funktionen

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ bzw. } \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

heißen Sinus hyperbolicus bzw. Kosinus hyperbolicus.



- Der Graph des Kosinus hyperbolicus liegt symmetrisch zur y-Acshe, und
- Der Graph des Sinus hyperbolicus liegt punktsymmetrisch zum Ursprung.

Mit anderen Worten:

$$\cosh(-x) = \cosh(x) \text{ und } \sinh(-x) = -\sinh(x).$$

Definition 3.7. Eine Funktion f heißt

- gerade, wenn sie $f(-x) = f(x)$ erfüllt. Ihr Graph liegt dann symmetrisch zur y-Achse.
- ungerade, wenn sie $f(-x) = -f(x)$ erfüllt. Ihr Graph liegt dann punktsymmetrisch zum Ursprung.

Satz 3.8.

i) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

ii) $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

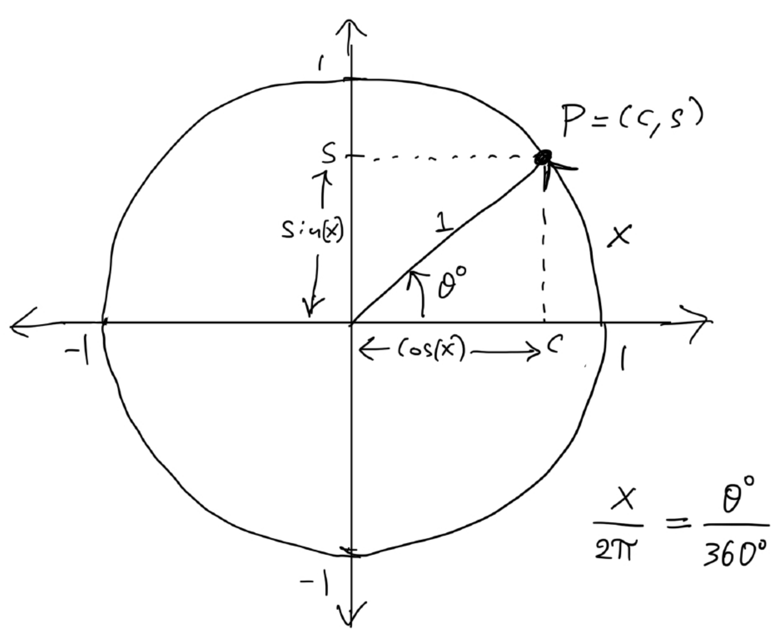
iii) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

Außerdem haben wir:

- (Umkehrfunktion: Areasinus und Areakosinus hyperbolicus)
$$\mathbf{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \text{ und } \mathbf{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$
- (Tangens und Kotangens hyperbolicus)
$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \text{ und } \coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}.$$

Trigonometrische Funktionen

Betrachten wir den Einheitskreis und lassen darauf einen Punkt P beginnend bei $(1,0)$ entgegen dem Uhrzeigersinn rotieren. Dann wird P eindeutig durch die am Kreisbogen zurückgelegte Länge x charakterisiert. Der Wert von x wird als Bogenlänge bezeichnet und ist ein Maß für den Winkel (siehe die folgende Abbildung).



Eine volle Umdrehung ist bei einem Winkel von 2π erreicht, was dem Umfang des Einheitskreises entspricht (und als Definition von π aufgefasst werden kann). Wir lassen auch Mehrfachumdrehungen zu und negatives x soll bedeuten, dass der Punkt P im Uhrzeigersinn am Kreisbogen entlang lauft (z. B. 3π, π oder $-\pi$ entsprechen demselben Punkt).

Definition 3.9. Sei $x \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Winkel und $P = (c, s)$ der zugebörige Punkt am Einheitskreis wie in die obige Abbildung. Dann definieren wir
$$\sin(x) = s \text{ bzw. } \cos(x) = c$$
und nennen die beiden Funktionen Sinus(funktion) bzw. Kosinus(funktion).

Einen Winkel über die Lange des zugehörigen Kreisbogens anzugeben, wird als Bogenmaß (Einheit Radiant) bezeichnet. Die Umrechnung vom Gradmaß erfolgt mit:

$$x = \frac{2\pi}{360}\theta.$$

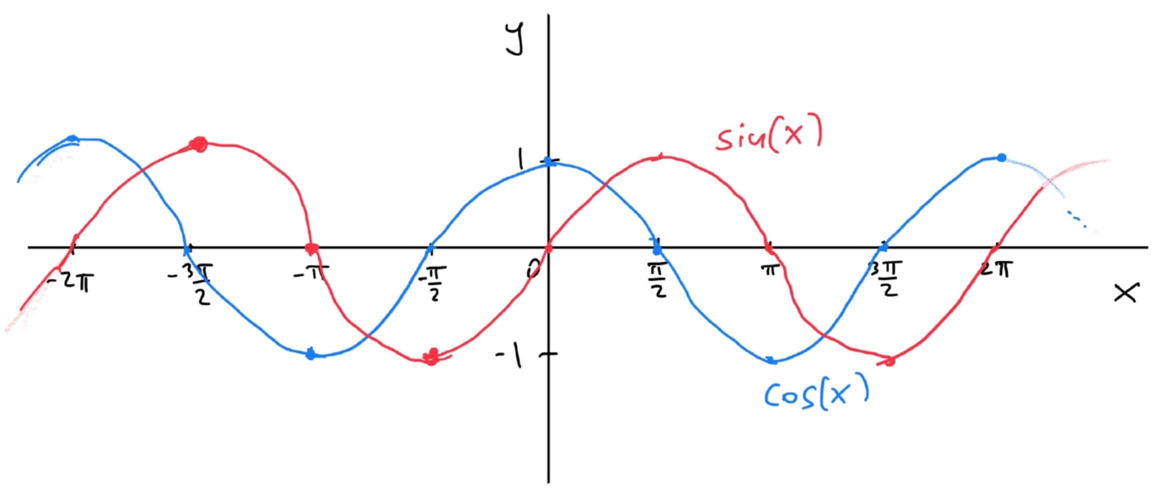
Man hat die Funktionen:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \cos(x). \end{aligned}$$

Beides $\sin$ und $\cos$ sind 2π-periodische Funktionen. Nämlich

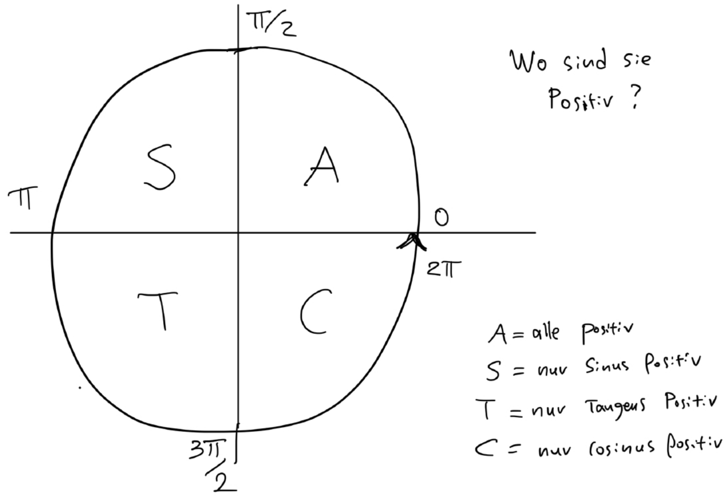
$$\sin(x + 2\pi k) = \sin(x) \text{ und } \cos(x + 2\pi k) = \cos(x) \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}.$$



Satz 3.10 (Eigenschaften)**.** Für alle $x \in \mathbb{R}$ haben wir:

- $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$ und $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$ und $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ und $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- usw.

Wir finden, mithilfe der Abbildung, für welche x, wen von $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ positiv ist:



Satz 3.11. Für jede $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

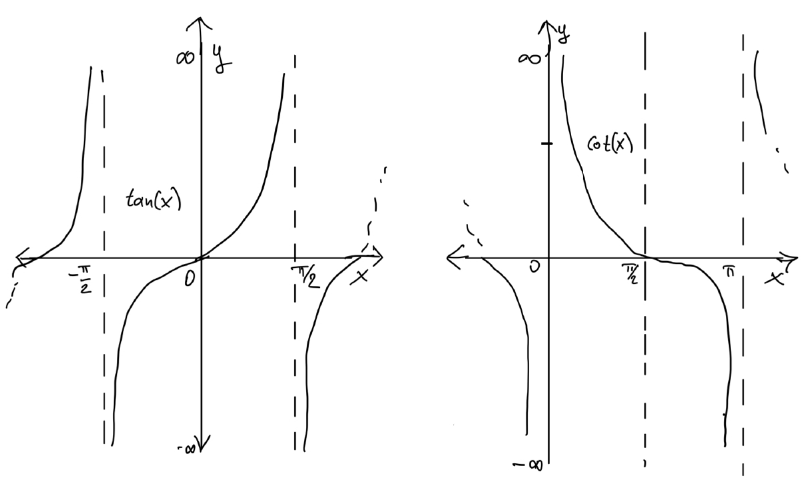
$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$$
$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y).$$

Definition 3.12. Wir definieren auch die Tangens und Kotangens Funktionen

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ und } \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Tabelle:

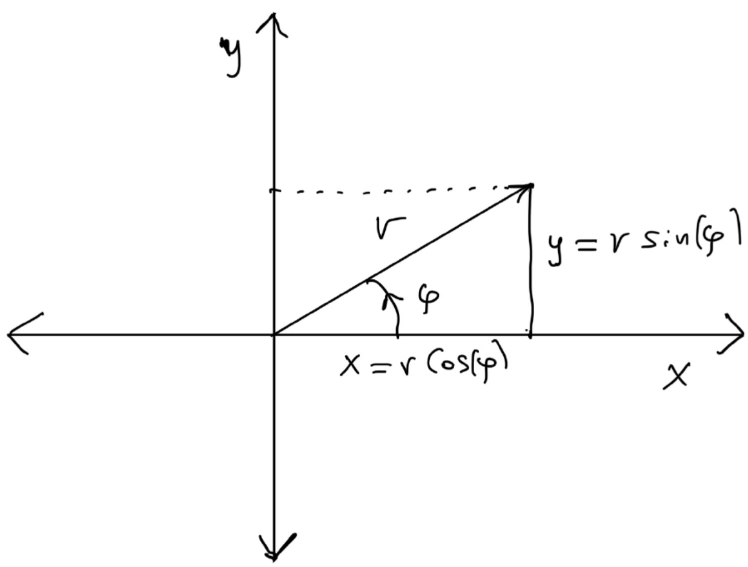
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\tan(x)$	0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}$	–	0	–	$0.$



4 Polardarstellung komplexer Zahlen

Erinnern Sie sich daran, dass eine komplexe Zahl $z = x + iy$ als ein Punkt (oder Zeiger) mit den Koordinaten (x, y) am Kreis mit Radius $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ aufgefasst werden kann.

- Die komplexe Zahl ist eindeutig dadurch festgelegt, dass wir Real- und Imaginärteil (x, y) angeben.
- Oder, alternativ, die Länge r des Zeigers und den Winkel φ, der von der x-Achse weg gemessen wird. Wir haben $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ (oder alternativ $(-\pi, \pi]$).



Man nennt

- (x, y) die kertesischen Koordinaten von z.
- (r, φ) die Polarkoordinaten von z.

Der Zusammenhang zwischen diese ist

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi), \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{falls } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{falls } y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Beispiel 4.1. Bestimmen Sie die Polarkoordinaten für:

a) $\underline{z = 1}$:

$$\begin{aligned} z = 1 + 0i &\Rightarrow (x, y) = (1, 0) \\ &\Rightarrow r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \text{ und } \varphi = \arccos(1/1) = 0. \\ &\Rightarrow (r, \varphi) = (1, 0). \end{aligned}$$

b) $\underline{z = i}$:

$$\begin{aligned} z = 0 + 1 \cdot i &\Rightarrow (x, y) = (0, 1) \\ &\Rightarrow r = 1 \text{ und } \varphi = \arccos(0/1) = \pi/2 \\ &\Rightarrow (r, \varphi) = (1, \pi/2). \end{aligned}$$

c) $\underline{z = 1 + i\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned} (x, y) = (1, \sqrt{3}) &\Rightarrow r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \\ \text{und } \varphi = \arccos(1/2) = \pi/3 &\Rightarrow (r, \varphi) = (2, \pi/3). \end{aligned}$$

d) $\underline{z = 1 - i\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned} (x, y) = (1, -\sqrt{3}) &\Rightarrow r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \\ \text{und } \varphi = -\arccos(1/2) = -\pi/3 &\Rightarrow (r, \varphi) = (2, -\pi/3). \end{aligned}$$

Die Darstellung

$$z = r\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

wird als Polardarstellung von z bezeichnet.

Dies kann mithilfe der komplexes Exponentialfunktion kompakter geschrieben werden:

Definition 4.2. Die komplexe Exponentialfunktion ist definiert als

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z = x + iy &\mapsto e^z = e^x(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)). \end{aligned}$$

Beispiel 4.3. Geben Sie den Real- und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen an:

$a)\ e^{2+i\pi/3} \qquad b)\ e^{i\pi/4}$.

Lösung

a)

$$\begin{aligned} e^{2+i\pi/3} &= e^2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) \\ &= e^2(1/2 + i\sqrt{3}/2) \\ &\approx 3.7 + 6.4i. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
e^{i\pi/4} &= e^0(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) \\
&= \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2 \\
&\approx 0.71 + 0.71i.
\end{aligned}$$

Satz 4.4 (Formel von Euler)**.** Es gilt

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y), \text{ für beliebiges } y \in \mathbb{R}.$$

- Damit können wir die Polardarstellung einer komplexen Zahl z kurz als

  $$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

  schreiben.

- Für die zugehörige konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ gilt: $\overline{z} = re^{-i\varphi}$. Denn:

  $$\begin{aligned}
  \overline{z} &= r(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)) \\
  &= r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \\
  &= re^{-i\varphi}.
  \end{aligned}$$

Satz 4.5. Für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Denn:

$$z_1z_2 = \left(r_1e^{i\varphi_1}\right)\left(r_2e^{i\varphi_2}\right) = r_1r_2e^{\varphi_1+\varphi_2}.$$

Beispiel 4.6. Sei $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ und $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
Dann:

$$z_1z_2 = (1 + i\sqrt{3})(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = \ldots = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) + i\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1),$$

oder

$$z_1z_2 = (2e^{i\pi/3})(2e^{-i\pi/4}) = 4e^{i(\pi/3-\pi/4)} = 4e^{i\pi/12}.$$

Satz 4.7. Für $z = re^{i\varphi}$ gilt:

$$z^n = r^ne^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Definition 4.8. Sei $z = re^{i\varphi}$, dann heißt

$$\sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{r}e^{i\varphi/n}, \text{ mit } -\pi < \varphi \leq \pi,$$

die <u>n-te Wurzel von z</u>.

Aber Achtung! $\sqrt{z_1 z_2} \neq \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$, z.B.:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{i} = i \cdot i = -1.$$

Beispiel 4.9. Geben Sie Real- und Imaginärteil an:

$$a)\ \sqrt{1+i\sqrt{3}} \qquad b)\ \sqrt[3]{8e^{i\pi/2}} \qquad c)\ \sqrt[4]{-1}.$$

Lösung

a)

$$\begin{aligned}\sqrt{1+i\sqrt{3}} &= \sqrt{2e^{i\pi/3}} \\ &= \sqrt{2}e^{i\pi/6} \\ &= \sqrt{2}(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) \\ &= \sqrt{3/2} + i/\sqrt{2}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8e^{i\pi/2}} &= \sqrt[3]{8}e^{i\pi/6} \\ &= 2(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) \\ &= \sqrt{3} + i.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{-1} &= \sqrt[4]{1 \cdot e^{i\pi}} \\ &= \sqrt[4]{1}e^{i\pi/4} \\ &= \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) \\ &= \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2.\end{aligned}$$

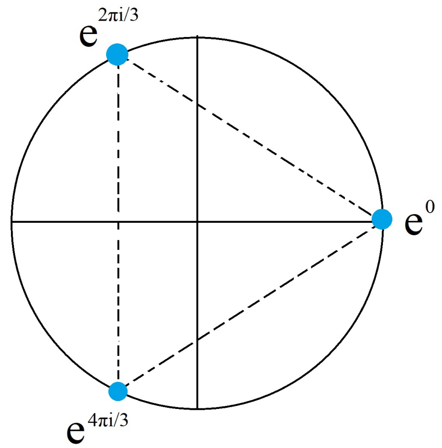
Die n-te Wurzel $w = \sqrt[n]{z}$ ist nicht die einzige Lösung der Gleichung $w^n = z$. Es gibt insgesamt n Lösungen:

$$\sqrt[n]{z},\ \sqrt[n]{z}e^{2\pi i\frac{1}{n}}, \dots,\ \sqrt[n]{z}e^{2\pi i\frac{n-1}{n}}$$

Die Zahlen

$$e^{2\pi i\frac{k}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1,$$

heißt die n-te Einheitswurzeln.
Sie sind gerade die n Lösungen von $w^n = 1$, z.B. für $n = 3$ haben wir:



Beispiel 4.10. Geben Sie alle Lösungen an:

$$a)\ w^2 = 1 + i\sqrt{3} \qquad b)\ w^3 = 8e^{i\pi/2} \qquad c)\ w^4 = -1.$$

Lösung

a) (Hier $n = 2$) Ein Lösung ist $w_1 = \sqrt{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt{2}e^{i\pi/6}$. Die andere ist

$$w_2 = w_1 e^{2\pi i \frac{1}{2}} = \sqrt{2}e^{i\pi/6}e^{2\pi i \frac{1}{2}} = \sqrt{2}e^{i7\pi/6}.$$

b) (Hier $n = 3$) Wir berechnen

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[3]{8e^{i\pi/2}} = 2e^{i\pi/6} \\ \Rightarrow w_2 &= 2e^{i\pi/6}e^{2\pi i \frac{1}{3}} = 2e^{i5\pi/6} \\ \Rightarrow w_3 &= 2e^{i\pi/6}e^{2\pi i \frac{2}{3}} = 2e^{i9\pi/6}. \end{aligned}$$

c) (Hier $n = 4$) Wir berechnen

$$w_1 = e^{i\pi/4} \qquad w_2 = e^{i\pi/4}e^{2pii\frac{1}{4}} = e^{i3\pi/4} \qquad w_3 = e^{i5\pi/4} \qquad w_4 = e^{i7\pi/4}.$$

Definition 4.11. Der komplexer Logarithmus ist definiert als:

$$\begin{aligned} \mathbf{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C} \\ z = re^{i\varphi} &\mapsto \mathbf{Log}(z) = \ln(r) + i\varphi. \end{aligned}$$

Für den Winkel wählt man den Hauptwert $\varphi \in (-\pi, \pi]$ (und spricht dann vom Hauptzweig des komplexen Logarithmus. Der k-te Zweig ist durch $\mathbf{Log}(z) + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gegeben).

Beispiel 4.12. Geben Sie den komplexen Logarithmus (den Hauptwert) der folgenden Zahlen an:

a) $z = 1 \Rightarrow \mathbf{Log}(1) = \mathbf{Log}(e^{i\cdot 0}) = \ln(1) + i \cdot 0 = 0.$

b) $z = 2 \Rightarrow \mathbf{Log}(i) = \mathbf{Log}(e^{i\pi/2}) = \ln(1) + i\pi/2 = i\pi/2.$

c) $z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{Log}(1 + i\sqrt{3}) = \mathbf{Log}(2e^{i\pi/3}) = \ln(2) + i\pi/3.$

d) $z = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{Log}(1 - i\sqrt{3}) = \mathbf{Log}(2e^{-i\pi/3}) = \ln(2) - i\pi/3.$

5 Folgen

In dieser Lektion werden wir über Folgen sprechen.

Definition 5.1. Eine reelle (komplexe) Folge ist eine Funktion

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

auch geschrieben als $a_0, a_1, a_2, \dots$ oder (a_n). Die reellen Zahlen a_n nennt man die Glieder der Folge, die Zahl n Index der Folge.

Bemerkung 5.2. Üblicherweise beginnen Folgen mit dem Folgenglied a_0, es kann aber auch sinnvoll sein, einen anderen Startindex zu wählen, z.B. für die Folge mit dem Bildungsgesetz $a_n = 1/n$ ist das Folgenglied a_0 nicht definiert. Hier beginnet man mit dem Folgenglied a_1, um sich umständliche Notationen wie $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ zu ersparen.

Folgen können rekursiv oder direkt beschrieben werden.

Beispiel 5.3. Wir betrachten diese Beispiele.

a) Die Folge $0, 1, 24, 9, 16, \dots$ hat direkt beschrieben: $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Die bekannte *Fibonacci-Folge* $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, für $n > 1$ ist eine rekursiv definierte Folge.

Definition 5.4. Eine reelle Folge (a_n) heißt

- nach oben beschränkt, wenn es ein reelle K gibt, sodass $a_n \leq K$ für alle n.
- nach unter beschränkt, wenn es eine reelle k gibt, sodass $k \leq a_n$ für alle n.
- beschränkt, wenn sie nach oben und unter beschränkt ist.
- monoton wachsend (monoton fallen), falls für alle n gilt: $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$).
- streng monoton wachsend (fallen), falls die obige Ungleichung strikt ist.

Bemerkung 5.5. Speziellen Typen sind die folgenden Folgen:

- Eine komplexe Folge (a_n) heißt beschränkt, falls die Beträge der Folgenglieder beschrankt sind, das heißt, wenn es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|a_n| \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Reelle Folgen, deren Folgenglieder abwechselnd ein anderes Vorzeichen haben, heißen alternierende Folgen.

Beispiel 5.6. Wir betrachten die folgende:

- Die komplexe Folge $a_n = e^{i \cdot n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist beschränkt, weil $|a_n| = 1$ gilt.

- Die reelle Folge $a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist alternierende.

Definition 5.7. Eine Folge (a_n) heißt konvergent gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(|a_n - a| < \varepsilon).$$

- Das heißt, für jede noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es einen Folgenindex n_0, sodass alle Folgenglieder ab diesem Index von der Zahl a höchstens den Abstand ε haben.

- Wir schreiben dafür:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \text{ für } n \to \infty$$

  und sagen 'die Folge a_n konvergiert gegen a' oder 'die Folge hat den Grenzwert a'.

- Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie divergent (z.B. $a_n = (-1)^n$).

- Wählt man aus einer Folge einen Teil der Folgenglieder aus, so spricht man (falls es unendlich sind) von einer Teilfolge (z.B. $(2n)$ ist eine Teilfolge von (n)).

- Für komplexe Folge gelten:

$$a_n \to a \text{ für } n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Re}(a_n) \to \mathbf{Re}(a) \text{ und } \mathbf{Im}(\mathbf{a_n}) \to \mathbf{Im}(a) \text{ für } n \to \infty.$$

Satz 5.8. Für konvergente Folgen gelten:

i) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

ii) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis.

i) Angenommen, es gibt zwei verschiedene Grenzwerte a, b einer konvergenten Folge (a_n). Dann erhalten wir die Ungleichung

$$|a - b| = |(a - a_n) - (a_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Ab einem gewissen Folgenindex n_0 würde dann gelten:

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ und } |a_n - b| < \varepsilon,$$

für alle $n \ge n_0$. Das heißt,für jede $\varepsilon > 0$, gibt es dies n_0. Für $\varepsilon := |a - b|/3 > 0$ gelten:

$$|a - b| \le |a - a_n| + |a_n - b| \le \frac{2}{3}|a - b|$$

Aber dies impliziert, dass $1 \le 2/3$! Wir haben einen Widerspruch. Also $a = b$.

ii) Für einer konvergenten Folge (a_n), $a_n \to a$, für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| \leq \varepsilon$, für alle $n \geq n_0$. Also haben wir

$$|a_n| \leq r := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a| + \varepsilon\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $-r \leq a_n \leq r$ für all n. Deshalb (a_n) ist beschränkt.

$\square$

Definition 5.9. Eine konvergente Folge (a_n) mit $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ heißt Nullfolge.

Beispiel 5.10. Die folgenden Folgen sind Nullfolgen:

a) $a_n := 1/n$;

b) $a_n := q^n$, für alle $|q| < 1$, $q \neq 0$.

Lösung

a) $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ ist erfüllt für alle $n > 1/\varepsilon$.

b) Aus dem Graphen der Exponentialfunktion $y = a^x$ mit $a > 1$ wissen wir, dass sie oberhalb der Diagonalen $y = x$ liegt. Also:

$$a > 1 \Rightarrow a^x > x \text{ für alle } x \text{ in } \mathbb{R}$$

erfüllt.

Für $a := 1/|q| \Rightarrow (1/|q|)^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow |q|^n < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Also, $|q^n - 0| < \varepsilon$ ist erfüllt für alle $n > 1/\varepsilon$.

Satz 5.11 (Rechenregeln für konvergente Folgen)**.** Sind a_n und b_n mit den Grenzwerten a bzw. b, so sind auch die Folgen $c \cdot a_n$ ($c \in \mathbb{R}$), $a_n \pm b_n$, $a_n \cdot b_n$ und a_n/b_n ($b \neq 0$ vorausgesetzt) konvergent mit den Grenzwerten:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$.

Beispiel 5.12. Bestimmen Sie den Grenzwert:

a) $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}$;

b) $b_n = \dfrac{2n^2-3}{n^2+n+1}$.

Lösung

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0+0\cdot 0 = 0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-3}{n^2+n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{2-0}{1+0+0} = 2.$

Satz 5.13. Für rationale Folgen gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_k\cdot n^k+\ldots+a_1\cdot n^1+a_0}{b_\ell\cdot n^\ell+\ldots+b_1\cdot n^1+b_0} = \begin{cases}\textbf{sign}\left(\dfrac{a_k}{b_k}\right)\cdot\infty & \text{falls } k>\ell\\ \dfrac{a_k}{b_\ell} & \text{falls } k=\ell\\ 0 & \text{falls } k<\ell.\end{cases}$$

Satz 5.14 (Kriterien für Konvergenz von Folgen)**.**

i) Jede beschränkte und monoton wachsende (fallende) Folge konvergiert.

ii) Das Produkt einer beschränkten Folge und einer Nullfolge ist eine Nullfolge.

Beispiel 5.15. Untersuchen Sie, ob die folgende Folgen konvergente sind:

a) $a_n := \dfrac{\sin(n)}{2^n}$

b) $a_n := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

c) $a_1 := 2$, $a_{n+1} := \dfrac{1}{2}(a_n+6)$, $n\geq 1$.

Lösung

a) $|\sin(n)|\leq 1$ und $\dfrac{1}{2^n}\to 0 \Rightarrow \dfrac{\sin(n)}{2^n}\to 0.$

b) Man kann zeigen, dass (a_n) beschränkte ist: z.B. dass $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq e$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Außerdem, haben wir, dass $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ monoton wachsende ist. Deshalb, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ist konvergente. Man kann auch zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

c) Zuerst zeigen wir, dass $a_{n+1} > a_n$ gilt: Für $n = 1$, es ist klar, weil $a_2 = 4 > 2 = a_1$. Sei $a_{n+1} > a_n$. Dann $a_{n+1} + 6 > a_n + 6 \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}+6}{2} > \dfrac{a_n+6}{2} \Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$.

   Danach zeigen wir, dass $2 \leq a_n < 6$: Es ist klar, dass $a_n \geq 2$, weil $a_n \geq a_1 = 2$. Für $a_n < 6$: für $n = 1$, $a_1 = 2 < 6$ gilt. Sei $a_n < 6$, dann $a_{n+1} = \dfrac{a_n+6}{2} < 6$ gilt.

   Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Rightarrow a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n+6}{2} = \dfrac{a+6}{2} \Rightarrow 2a = a + 6 \Rightarrow a = 6$.

Definition 5.16 (Cauchy (1789-1857))**.** Eine Folge (a_n) für die gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(|a_m - a_n| < \varepsilon)$$

heißt Cauchy-Folge.

Satz 5.17 (Cauchy-Kriterium für Folgen)**.** Sei (a_n) eine reelle oder komplexe Folge, dann gilt: (a_n) ist konvergiert genau dann, wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

Bemerkung 5.18. Die Umkehrung von diesem Satz gilt nicht immer, z.B. die Folge

$$a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n + \dfrac{2}{a_n}}{2}, n \geq 0,$$

ist Cauchy aber nicht konvergent in die Menge $\mathbb{Q}$ sondern in $\mathbb{R}$, weil $a_n \to \sqrt{2}$ für $n \to \infty$.

Beweis. Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$: $|a_n - a| < \varepsilon/2$. Dann für alle $n, m \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a) + (a - a_m)| \\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

6 Reihen

Wir betrachten eine interessante Klasse von Folgen, die Reihen.

Definition 6.1. Sei (a_n) eine Folge. Eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots$$

ist die Folge (S_m) der Partialsummen (oder Teilsummen):

$$S_m := \sum_{n=0}^{m} a_n.$$

- Wenn die Folge (S_m) konvergiert, dann heißt die Reihe konvergent. Mann nennt in diesem Fall den Grenzwert

  $$s := \lim_{m\to\infty} S_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

  die Summe der Reihe.

- Eine nicht-konvergierte Reihe heißt divergent.

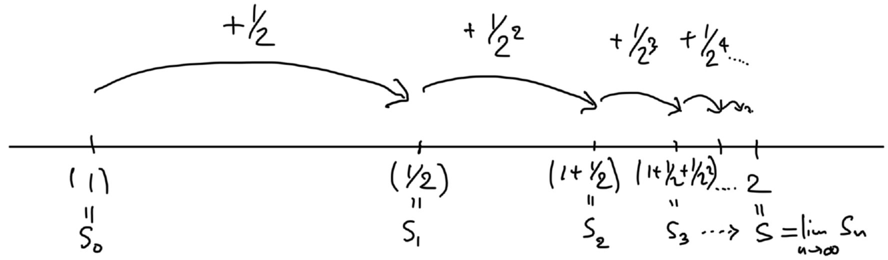
- Konvergent sogar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$, so nennt man die Reihe absolut konvergent.

Beispiel 6.2. Untersuchen Sie die Reihen:

$a)\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} 1/2^k \qquad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2 \qquad c)\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k \qquad d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n.$

Lösung

a) Sei $s = 1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \ldots \Rightarrow 2 \cdot s = 2 \cdot 1 + 1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \ldots = 2 + s$. Deshalb $2s = 2 + s \Rightarrow s = 2$.



b) Mit dem Computer berechnen wir $S_1 = 1$, $S_2 = 1.3611$, $S_3 = 1.5497, \dots\ 1.64$. Man kann zeigen, dass der Grenzwert $\pi^2/6 = 1.64493\dots$ ist.

c) Die Partialsummen Folge $1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots$ ist divergent, das heißt, die Reihe ist divergent.

d) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ heißt die harmonische Reihe. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 1/n &= 1 + (1/2) + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \dots \\ &\geq 1 + (1/2) + (1/4 + 1/4) + (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8) + \dots \\ &= 1 + (1/2) + (1/2) + (1/2) + \dots \\ &= 1 + (1/2) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} 1) \\ &= 1 + (1/2) \cdot (+\infty) \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Deshalb $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = +\infty$, das heißt, es ist divergent.

Satz 6.3 (Notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe)**.** Es gilt:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n$ ist Nullfolge.

Bemerkung 6.4. Die Umkehrung gilt im Allgemein nicht!

Beweis. Sei (S_m) die Folge der Partialsummen uns S der Grenzwert der Partialsummen-Folge (d.h. der Reihe). Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} a_m &= \lim_{m\to\infty} (S_m - S_{m-1}) \\ &= \lim_{m\to\infty} S_m - \lim_{m\to\infty} S_{m-1} \\ &= S - S \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Satz 6.5.

- Sind $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

- Absolut konvergente Reihen darf man auch multiplizieren, und es gilt das Cauchy-Produkt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \qquad \text{mit} \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot b_{k-j}.$$

Lemma 6.6 (Cauchy-Kriterium für Reihen)**.** Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m, n \geq n_0)\left(\sum_{k=n}^{m} a_k < \varepsilon\right).$$

Beweis. Ergibt sich aus Cauchy-Kriterium für die Partialsummen Folge $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k$. □

Definition 6.7. Eine Reihe $\sum a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum |a_k|$ konvergent ist.

Lemma 6.8. Ist die Reihe $\sum a_k$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.

Beweis. Nach dem Cauchy-Kriterium für die Reihe $\sum |a_k|$ gilt dann:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m, n \geq n_0)\left(\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon\right)$$

und nach der Dreiecksungleichung haben wir:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon.$$

□

Beispiel 6.9. Untersuchen Sie die Reihen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1)$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$

Lösung

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1)$ ist konvergent als eine Teleskopsumme. Denn es gilt:

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{n=1}^{m} 1/n(n+1) \\ &= \sum_{n=1}^{m} (1/n - 1/(n+1)) \\ &= (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + \ldots + (1/m - 1/(m+1)) \\ &= 1 - 1/(m+1). \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1) = \lim\limits_{m\to\infty} S_m = 1 < \infty$. Also konvergent.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ ist konvergent auch. Denn es gilt:

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} 1/n^2 = \sum_{n=1}^{m-1} 1/(n+1)(n+1) \leq 1 + \sum_{n=1}^{m-1} 1/n(n+1) \leq 1 + 1 = 2.$$

Deshalb die monoton wachsende Folge S_m ist auch beschränkt. Vom Satz 5.14 (Kriterien für Konvergenz von Folgen) haben wir, dass (S_m) konvergiert ist. Also, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ ist konvergent.

Lemma 6.10 (Leibniz-Kriterium)**.** Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent.

Beweis. Es gilt $a_k - a_{k+1} \geq 0$, weil (a_k) monoton fallende ist. Dann:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n}^{m} (-1)^k a_k \right| &= |(-1)^n \cdot (a_n + - \cdot a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} + \ldots \pm a_m)| \\
&= (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \ldots \pm a_m \\
&= a_n - (a_{n+1} - a_{n+2}) - (a_{n+3} - a_{n+4}) - \ldots \pm a_m \\
&\leq a_n + a_m \\
&= |a_n| + |a_m|.
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da (a_k) Nullfolge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_k| < \varepsilon/2$ für alle $k > n_0$. Deshalb gilt $|a_n| + |a_m| < \varepsilon$ fur alle $m, n > n_0$. $\square$

Bemerkung 6.11. Ist eine Reihe konvergent, muss sie nicht auch absolut konvergent sein, z.B. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n/n$ ist konvergent, aber nicht absolut, weil $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |(-1)^n/n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/n$ divergent ist.

Satz 6.12 (Majorantenkriterium)**.** Gilt $0 \leq |a_k| \leq b_k$ für alle $k > n_0$ und ist $\sum b_k$ konvergente Reihe, so konvergente die Reihe $\sum a_k$ absolut.

Beweis. Wir haben

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m, n \geq n_0) \left(\sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon \right).$$

Wegen der Dreiecksungleichung und dem Cauchy-Kriterium fur Reihen haben wir:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon.$$

Also konvergiert $\sum a_k$ absolut. $\square$

Satz 6.13 (Minorantenkriterium)**.** Gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k > n_0$ und ist die Reihe $\sum a_k$ divergente, so divergent auch die Reihe $\sum b_k$ ist.

Beispiel 6.14. Untersuchen Sie die Reihen:

$a) \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k} \qquad b) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

Lösung

a) Es gilt, dass $\ln(k) > 1$ für alle $k > 2$ ist. Deshalb gilt $\frac{1}{k} \leq \frac{\ln(k)}{k}$ für alle $k > 2$ und auch ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent. Aus dem Minorantenkriterium ergibt sich, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k}$ divergent ist.

b) Es gilt, dass $\frac{1}{k^3} > \frac{1}{k^2}$ für alle $k \geq 1$ und auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent ist. Aus dem Majorantenkriterium ergibt sich, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ konvergent ist.

Definition 6.15. Eine Reihe der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ mit einem beliebigen $q \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt <u>geometrische Reihe</u>.

Satz 6.16 (Konvergenz/Divergenz der $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$)**.**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{falls } |q| < 1 \\ \text{divergent}, & \text{falls } |q| \geq 1. \end{cases}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} S_m &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^m \\ \Rightarrow q \cdot S_m &= q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{m+1} \\ \Rightarrow (1-q) \cdot S_m &= 1 - q^{m+1} \\ \Rightarrow S_m &= \frac{1-q^{m+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

- Wenn $|q| < 1$, dann konvergiert die Folge (q^{m+1}) gegen 0, und damit konvergiert (S_m) gegen $\frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.
- Wenn $|q| \geq 1$, (q^{m+1}) divergent ist und deshalb ist (S_m) auch divergent.

□

Satz 6.17 (Quotientkriterium)**.** Gegeben sei die Reihe $\sum a_n$. Gilt für alle $n > n_0$: $a_n \neq 0$ und gibt es ein festes $0 < q < 1$, sodass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$$

gilt, so konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut.

Beweis. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ für alle $n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n_0+m}| \leq q^m \cdot |a_{n_0}|$ für alle $m \geq 1$. Also:

$$|a_n| \leq q^n \cdot \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \text{ für alle } n > n_0.$$

Aus dem Majorantenkriterium folgt die Konvergenz der Reihe $\sum a_n$. □

Beispiel 6.18. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist konvergent:

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \Rightarrow |a_n| = \frac{|x|^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^n/n!}{|x|^{n+1}/(n+1)!} = \frac{|x|}{n} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Also, für jede $0 < q < 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq n_0$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$.

Satz 6.19 (Wurzelkriterium)**.** Gegeben sei die Reihe $\sum a_n$. Gibt es ein festes $q < 1$, sodass für alle $n > n_0$ gilt: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, so konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut.

Beweis. Wegen $|a_n| \leq q^n$ für alle $n > n_0$ folgen die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum q^n$. □

Beispiel 6.20. Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

Lösung Wir berechnen $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2+3/n}{3+2/n} \to \frac{2}{3}$ für $n \to \infty$. Dann:

$$\left(\forall q \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)\right) (\exists n_0 \in \mathbb{N})\, (\forall n \geq n_0) \left(\sqrt[n]{|a_n|} \leq q\right).$$

Aus dem Wurzelkriterium ergibt sich, dass die Reihe $\sum a_n$ konvergent ist.

Bemerkung 6.21. Man hat auch diesen Kriterien für die Konvergenz/Divergenz von Reihen:

- Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$, dann $\sum a_n$ konvergent ist.
- Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q > 1$, dann $\sum a_n$ divergent ist.
- Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$, dann $\sum a_n$ konvergent ist.
- Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q > 1$, dann $\sum a_n$ divergent ist.

7 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

In dieser Lektion untersuchen wir Funktionen auf Stetigkeit. Zuerst werden wir über Grenzwert einer Funktion diskutieren.

Definition 7.1. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $D \subset \mathbb{K}$. Sei $f : D \subset\!\!\rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ (muss nicht notwendigerweise im Definitionsbereich D von f liegen). Wenn für jede Folge $x_n \in D \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \ldots$, mit $x_n \to x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to y_0$, dann nennt man y_0 den Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0 und schreibt dafür:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

Wie bei Folgen ist $y_0 = \pm\infty$ erlaubt und wir sprechen in diesem Fall wieder von bestimmter Divergenz.

Mit Grenzwerten von Folgen kann man auch mit Grenzwerten von Funktionen rechnen.

Lemma 7.2. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $D \subset \mathbb{K}$. Sei $f, g : D \to \mathbb{K}$ Funktionen, $x_0 \in D$ und $c \in \mathbb{K}$. Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = u$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = w$, dann gelten:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot u$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = u \pm w$;
- $\lim\limits_{n \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = u \cdot w$;
- $\lim\limits_{n \to x_0} (f(x)/g(x)) = \dfrac{u}{w}$, falls $w \neq 0$.

Beispiel 7.3. Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x^1 + \ldots a_n \cdot x^n$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, wobei

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Lösung

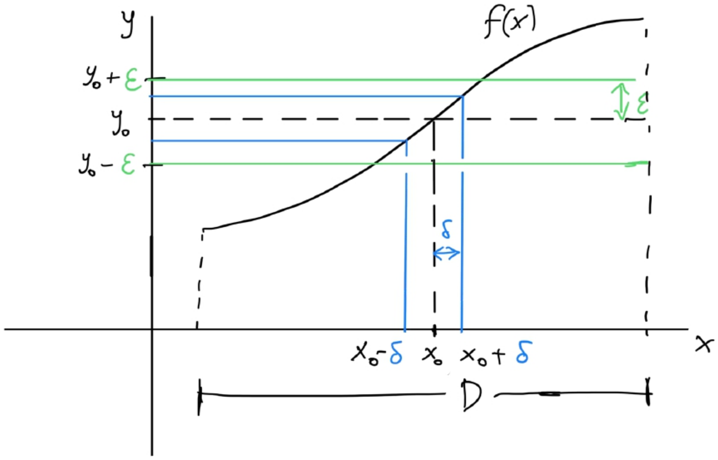
a) Es folgt von den Rechnenregeln von Folgen kann man sieht, dass $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

b) Für $x_n := 1/n \to 0$ haben wir $\lim\limits_{x_n \to 0} g(x_n) = 1$.

   Aber, für $x_n := -1/n \to 0$ haben wir $\lim\limits_{x_n \to 0} g(x_n) = 0$.

Bemerkung 7.4. Mit anderen Worten: y_0 ist der Grenzwert von f für x gegen x_0, wenn die Funktionswerte $f(x)$ dem Wert y_0 beliebig nahe kommen, sobald die zugehörigen Argumente x dem Wert x_0 beliebig nahe kommen. Das heißt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D)\,(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon)\,.$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\,(|f(x) - y_0| < \varepsilon)$$

Manchmal ist es notwendig zu unterscheiden, ob man sich x_0 von links ($x < x_0$) oder von rechts ($x > x_0$) nähert. In diesem Fall spricht man, wenn sie existieren, vom linksseitigen Grenzwert bzw. vom rechtsseitigen Grenzwert. Schreibweise:

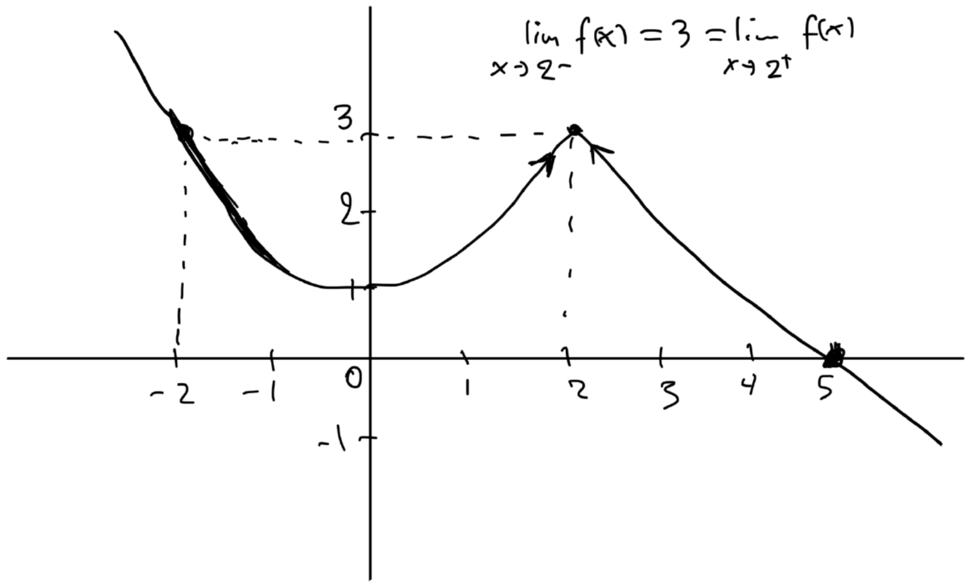
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to x_0+} f(x).$$

Der Grenzwert existiert genau dann, wenn links- und rechtsseitigen Grenzwert (existieren und) gleich sind.

Beispiel 7.5. Untersuchen Sie, wie verhaltet die Funktionswerte für $x \to x_0$.

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1, & \text{falls } x < 2 \\ -x + 5, & \text{falls } x > 2 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad x_0 = 2.$$



Aus dem Funktionsgraph von f erhalten wir: $\lim_{x\to 2-} f(x) = 3 = \lim_{x\to 2+} f(x)$. Sie sind gleich. Deshalb $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.

b) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ und $x_0 = 0$.

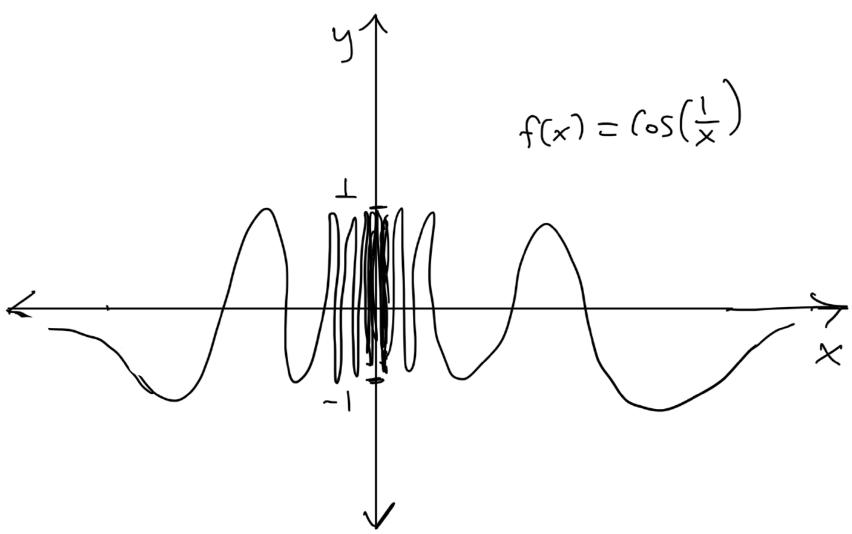
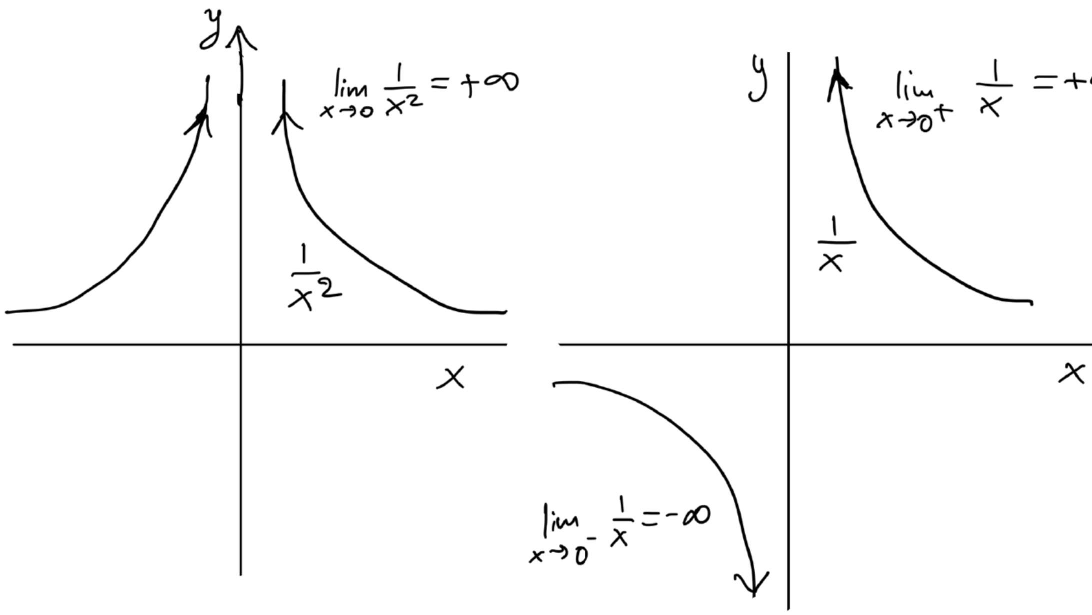


Abbildung zeigt, dass $f(x)$ für $x \to 0$ immer starker oszilliert. Wir vermuten deshalb, dass für $x \to 0$ keinen Grenzwert existiert. Zum Beispiel wählen wir die Nullfolge $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$.

Hatte $f(x)$ für $x \to 0$ einen Grenzwert, so musste die Folge $f(x_n)$ gegen diesen Grenzwert konvergieren. Nun $f(x_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ springen aber immer zwischen -1 und 1 hin und her. Also $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existieren nicht.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ und $x_0 = 0$.

Aus dem Funktionsgraph erhalten wir, dass $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, weil links und rechts Grenzwerte gleich sind.



d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ und $x_0 = 0$.

Aus dem Funktionsgraph erhalten wir, dass die links und rechts Grenzwerte nicht gleich sind. Man hat $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Deshalb $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ existiert nicht.

Oft interessiert man sich für das Verhalten einer Funktion für $x \to \infty$ (bzw. $x \to -\infty$), das sogenannte asymptotische Verhalten.

Beispiel 7.6.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ für $x \to \pm\infty$;

b) $f(x) = \dfrac{3x+1}{4x-2}$ für $x \to \pm\infty$

Lösung

a) Für eine beliebige Folge $x_n \to \infty\ (-\infty)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Also $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{4x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{4-\frac{2}{x}} = \frac{3}{4}$.

Analog argumentieren wir für $x \to -\infty$.

Satz 7.7 (Asymptotik elementare Funktionen)**.**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = \infty \quad$ für $a > 0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a} = 0 \quad$ für $a > 0$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = (-1)^n\infty \quad$ für $n \in \mathbb{N}$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{ax} = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{ax} = 0 \quad$ für $a > 0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Definition 7.8. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $D \subset \mathbb{K}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt stetig an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist.

- Das heißt, dass für jede Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \to x_0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0)$$

  gilt.
- Ist die Funktion f an jeder Stelle in D stetig, so sagt man, f ist stetig (auf D).

Satz 7.9.

- Sind $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome, so ist $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ stetig an jeder Stelle, an der f definiert ist.
- Die bekannten Funktionen $\sin(x), \cos(x), \tan(x), \exp(x), \ln(x)$ sind stetig auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich.

- Sind f, g stetige Funktionen, so sind $f \pm g, f \cdot g$, der Quotient $\dfrac{f}{g}$ (wo definiert), und die Verkettung $f \circ g$ (wo definiert).

Beispiel 7.10. Sei $a \in \mathbb{R}$. Untersuchen, für welche Zahl $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}, & \text{falls } x \neq a \\ c, & \text{falls } x = a. \end{cases}$$

stetig.

Lösung

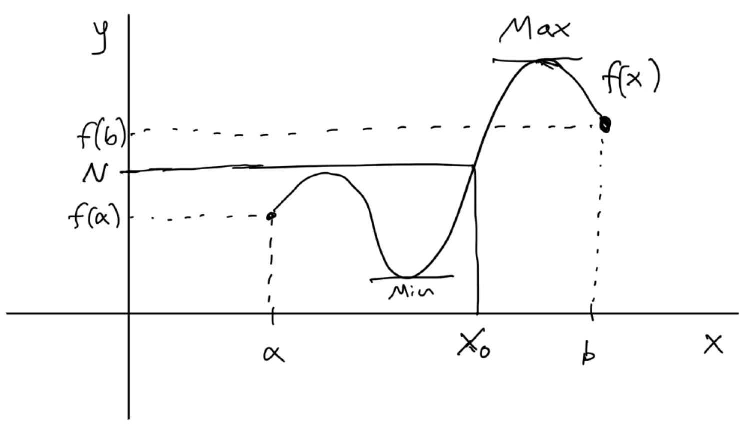
$f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ als eine Quotiente von zwei Polynomen. Auch haben wir

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2 \cdot a.$$

Wir haben auch, dass $f(a) = c$. So ist $f(x)$ stetig genau, wenn $c = 2 \cdot a$ gilt.

Abschließend erwähnen wir einige wichtige Sätze über stetige Funktionen

Satz 7.11 (Zwischenwertsatz)**.** Ist eine Funktion f im Intervall $[a, b]$ stetig, so nimmt sie jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



$$\big(\forall N \in (f(\alpha), f(b))\big)\big(\exists x_0 \in (a,b)\big)\big(N = f(x_0)\big)$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit sei $f(a) \leq f(b)$. Dann, das heißt:

$$(\forall N \in (f(a), f(b)))\,(\exists x_0 \in (a, b))\,(N = f(x_0))$$

Satz 7.12 (Satz von Weierstraß (1815-1897))**.** Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige reelle Funktion f nimmt auf diesem Intervall ihr Maximum und Minimum an. Insbesondere ist f auf $[a, b]$ beschränkt.

8 Potenzreihen und die Ableitung

In dieser Lektion untersuchen wir speziellen Reihen, den Potenzreihen, die gleichzeitig auch Funktionen sind.

Definition 8.1. Sei (a_n) eine reelle oder komplexe Folge, z_0 eine reelle oder komplexe Zahl.

- Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ heißt Potenzreihe um den Entwicklungspunkt z_0.
- Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $D \subset \mathbb{K}$. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{K} \\ z &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \end{aligned}$$

  Der Bereich D von f ist die Menge aller x, für die die Reihe konvergiert.

Zur Überprüfung der Konvergenz verwenden wir das Quotientkriterium:

Sei $q := \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.
Es gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}\cdot(z-z_0)^{n+1}}{a_n\cdot(z-z_0)^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |z-z_0| \xrightarrow{n\to\infty} q\cdot|z-z_0|.$$

- Ist $q\cdot|z-z_0| < 1 \Leftrightarrow |z-z_0| < \frac{1}{q}$ so konvergent die Potenzreihen ist.
- Ist $q\cdot|z-z_0| > 1 \Leftrightarrow |z-z_0| > \frac{1}{q}$ so divergent die Potenzreihen ist.
- $r := \frac{1}{q}$ heißt der Radius oder Konvergenzradius der Reihe.
- Die Menge $K := \{z \in \mathbb{K} \mid |z-z_0| < r\}$ heißt die Konvergenzkreis der Potenzreihe.

Bemerkung 8.2.

- Der Bereich D von $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ enthält die Konvergenzkreis K. Man muss $|z-z_0| = r$ sorgfältig auch untersuchen.
- Als Alternative können wir $q := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ verwenden. Wenn diese Grenzwerte beide existiert, sind sie gleich.
- Wenn $r = +\infty$ gilt, dann K ist ganz $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

- Wenn $r = 0$ gilt, dann nur für $z = z_0$ ist die Potenzreihe konvergent, das heißt $K = \{z_0\}$.

Beispiel 8.3 (Reelle Potenzreihen)**.** Untersuchen Sie die Konvergenzkreise und die Bereiche von der folgenden reellen Reiher.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n \quad (0! = 1)$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{5}\right)^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$.

Lösung

Wir haben $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $r = \frac{1}{q}$.

a) $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1 \Rightarrow r = 1.$

$\Rightarrow$ Konvergenzkreis ist $K = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\} = (-1, 1)$.

Aus dem Satz. 6.16 ist der Bereich D von der Potenzreihe auch $(-1, 1)$.

b) $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right| = 1 \Rightarrow r = 1.$

$\Rightarrow$ Konvergenzkreis ist $K = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\} = (-1, 1)$.

Allerdings ist der Bereich $D = [-1, 1)$, weil für $x = -1$ die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent ist und für $x = 1$ die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist.

c) $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1) \cdot n!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty. \Rightarrow r = 0.$

Das heißt, die Potenzreihe nur für $x = 0$ konvergent ist. Deshalb $K = \{0\}$.

d) $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{5^{n+1}}}{\frac{1}{5^n}}\right| = \frac{1}{5} \Rightarrow r = 5.$

$\Rightarrow K = \{x \mid |x - 3| < 5\} = (-2, 8)$.

Aus dem Satz. 6.16 ist der Bereich D von der Potenzreihe gleich mit der Konvergenzkreis K von der Potenzreihe. Das ist $D = (-2, 8)$.

e) $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} = 0$

$\Rightarrow$ der Radius ist $r = +\infty$.

$\Rightarrow$ der Konvergenzkreis ist $K = (-\infty, \infty)$.

Beispiel 8.4 (Komplexe Potenzreihen)**.** Untersuchen Sie die Konvergenzkreis von

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-i)^n.$$

Lösung

Wir haben $a_n = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $q := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Der Konvergenzkreis ist $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| < \frac{1}{2}\}$.

Satz 8.5. Eine Potenzreihe ist stetig in ihren Konvergenzkreisen.

Satz 8.6. Gilt für zwei Potenzreihen und $r > 0$ die Gleichung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

für alle z mit $|z-z_0| < r$, so sind die Koeffizienfolgen a_n und b_n identisch.

Beispiel 8.7. Untersuchen Sie der Konvergenzkreis der Potenzreihen:

a) $f(z) = \dfrac{1}{i-z}$ mit Entwicklungspunkt: $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \dfrac{1}{i-z}$ mit Entwicklungspunkt: $z_0 = 1$.

Lösung

a) $\underline{z_0 = 0}$:

$$\frac{1}{i-z} = -i\frac{1}{1-(-i\cdot z)} = -i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n.$$

$\Rightarrow$ für $|z| < 1$ ist $f(z)$ konvergiert.

b) $\underline{z_0 = 1}$:

$$\frac{1}{i-z} = \frac{1}{(i-1)-(z-1)} = \frac{1}{i-1} \cdot \frac{1}{1-\left(\dfrac{z-1}{i-1}\right)} = \frac{1}{i-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{i-1}\right)^n.$$

$\Rightarrow$ für $|z-1| < |i-1| \Leftrightarrow |z-1| < \sqrt{2}$ ist $f(z)$ konvergiert.

Beispiel 8.8. Wie wir bald sehen werden, für jede $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots . \tag{1}$$

- Diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius $r = +\infty$
  $\Rightarrow$ der Konvergenzkreis K ist ganz $\mathbb{C}$.
- Für $z = i \cdot x$, wobei $x \in \mathbb{R}$ man hat auch die Gleichung

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x). \tag{2}$$

- Aus der Gleichung (1) haben wir:

$$\begin{aligned} e^{i \cdot x} &= 1 + (i \cdot x) + \frac{(i \cdot x)^2}{2!} + \frac{(i \cdot x)^3}{3!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right). \end{aligned}$$

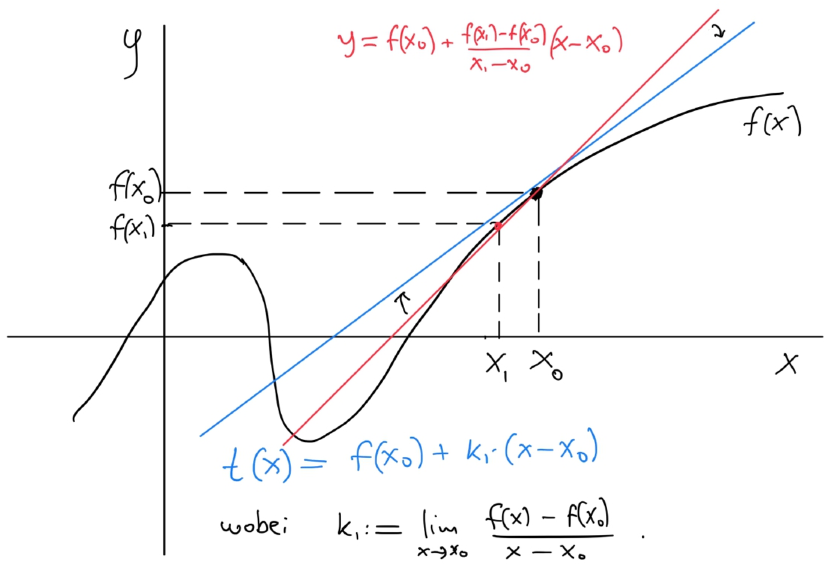
- Aus den Gleichungen (1) und (2) haben wir:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots . \end{aligned}$$

Motivation für die Potenzreihen: Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können sehr kompliziert sein. Wir mochten f durch einfachere Funktionen zu approximieren.

- Zuerst starten wir mit ein Punkt x_0 und versuchen $f(x)$ mit einer linearen Funktion (Gerade) $f(x_0) + k_1(x - x_0)$ approximieren, für x in der Nähe von x_0. Die Konstante $k_1 \in \mathbb{R}$ heißt <u>die Ableitung von f an x_0</u>.
- Dann können wir $f(x)$ mit quadratischen Funktionen $f(x_0) + k_1(x - x_0) + k_2(x - x_0)^2$ approximieren, für x in der Nähe von x_0.
- Durch Wiederholung dieser Prozedur können wir $f(x)$ mit einer Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} k_n(x - x_0)^n$ (wobei $k_0 = f(x_0)$). Diese Reihe heißt <u>Taylor Reihe von f</u>.

Wir beginnen mit der Definition der Ableitung von f: Die Frage ist nun, wie dabei die Steigung k_1 gewählt werden soll, damit ein gute Approximieren erreicht wird. Man nennt eine derartige Gerade durch zwei Punkte des Graphen von f ein <u>Sekante</u>.



Es ist klar, dass die Approximation im Punkt $(x_0, f(x_0))$ um so besser wird, je naher x_1 bei x_0 liegt. Die optimale Steigung ist also gegeben durch:

$$k_1 = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

vorausgesetzt, dieser Grenzwert existiert. Diese optimale Gerade $t(x) = f(x) + k_1(x - x_0)$ heißt die Tangente von f im $(x_0, f(x_0))$.

Definition 8.9. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D$, falls der Grenzwert der Sekantensteigungen:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert heißt (erste) Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird auch mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Wenn f in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches D differenzierbar ist, dann ist die Ableitung f' ebenfalls eine Funktion, nämlich jene, die jedem x die Ableitung $f'(x)$ an der Stelle x zuordnet. Ist f' stetig, so nennt man f stetig differenzierbar (auf D).

Man kann auch die zweite Ableitung $f^{(2)}(x) := (f')'(x)$ von f formulieren und danach, induktiv, für jede n die n-te Ableitung $f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x)$ von f (wobei $f^{(0)} := f$ und $f^{(1)} := f'$) formulieren.

Satz 8.10. Jede differenzierbar Funktion ist stetig.

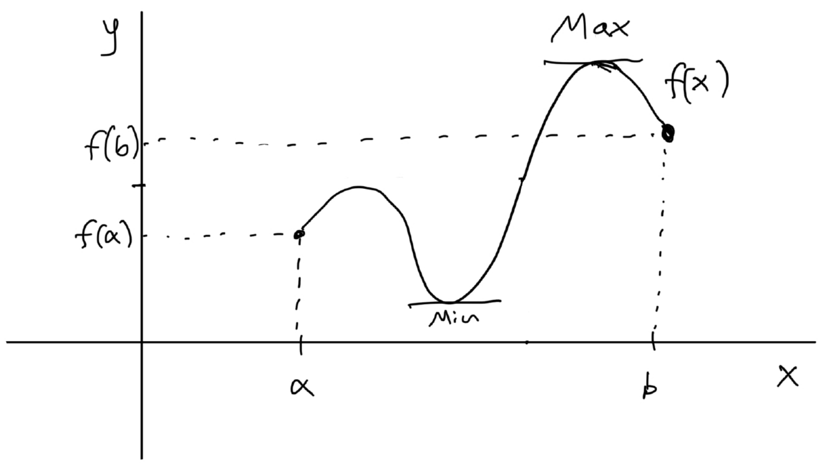
Beweis. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $x_0 \in D$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} (f(x_0) + f(x) - f(x_0)) \\ &= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) \\ &= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot (x - x_0) \\ &= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 \\ &= f(x_0).\end{aligned}$$

□

Bemerkung 8.11. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, z.B. $f(x) = |x|$ ist stetig, aber $f'(0)$ existiert nicht.

Satz 8.12 (Satz von Rolle (1652-1719))**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei f ist differenzierbar auf (a, b) und gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, sodass $f'(\xi) = 0$.



Beweis. Ist f auf $[a, b]$ konstant, dann erfüllt jedes $\xi \in (a, b)$ die Bedingung $f'(\xi) = 0$. Sei f nicht konstant auf $[a, b]$. Nach dem Satz von Weierstraß nimmt f auf $[a, b]$ sowohl Maximum als auch Minimum an. Eines von beiden muss von $f(a)$ verschieden und damit in (a, b) sein, sonst wäre f auf $[a, b]$ konstant. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei das Maximum im Inneren des Intervalls an der Stelle $\xi \in (a, b)$. Dann gilt $f(x) - f(\xi) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Da f differenzierbar ist, gilt

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0 \text{ und } f'(\xi) = \lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0.$$

□

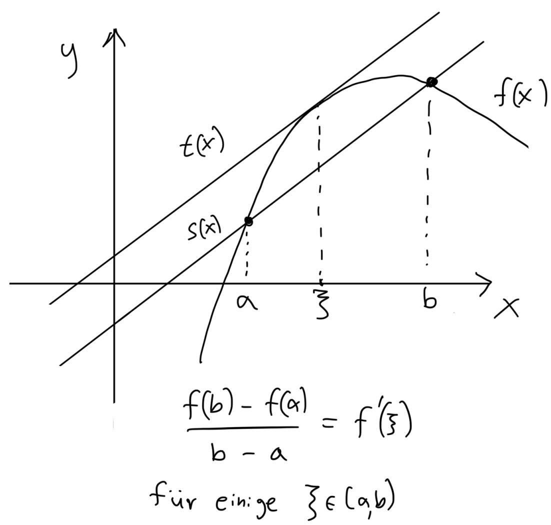
9 Anwendungen und Berechnung von Ableitungen

Sehen wir uns zunächst einige andere Anwendungen von Ableitungen an.

Korollar 9.1 (Korollar von Satz von Rolle)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt: f ist genau dann konstant, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ ist.

Satz 9.2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar auf (a, b). Dann, gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Beweis. Wir betrachten die Funktion $s(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$, die durch Punkt $(a, f(a))$ und Punkt $(b, f(b))$ verläuft. Die Funktion $s(x)$ hat Steigung $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Nun definieren wir die Hilfsfunktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ wobei:

$$h(x) := f(x) - s(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Dann $h(x)$ hat den Satz von Rolle erfüllt. Also $\exists \xi \in (a, b)$ mit $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

Satz 9.3 (Satz von Fermat)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in (a, b)$ ein <u>lokales Extremum</u> (das heißt, es gibt kleine $\varepsilon > 0$, sodass $f(x_0)$ Extremum (Maximum oder Minimum) auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ist). Wenn f an x_0 differenzierbar ist, dann $f'(x_0) = 0$.

Satz 9.4 (Kriterium für lokale Extrema)**.** Sei f eine zweimal differenzierbare Funktion in einem offenen Intervall (a, b). Dann gilt fur $x_0 \in (a, b)$:

- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so hat f bei x_0 ein lokales Minimum.
- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so hat f bei x_0 ein lokales Maximum.

Werden wir zur Berechnung einer Ableitung nicht die Definition direkt verwenden, sondern einige wenige Ableitungsregeln.

Satz 9.5 (Ableitungsregeln)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}$. Die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien an der Stelle x differenzierbar. Dann sind auch: $c \cdot f$ (wobei c ist konstante), $f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ $(g \neq 0), f \circ g$ differenzierbar und es gilt:

- (Linearität) $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$ und $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- (Produktregel) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- (Quotientregel) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.
- (Kettenregel) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Beweis. Die Ableitungsregeln folgen aus den Rechenregeln für Grenzwerte. Zum Beispiel folgt der Produktregel aus,

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) \\
&= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))
\end{aligned}
$$

womit sich

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)
\end{aligned}
$$

ergibt. □

Satz 9.6 (Ableitung elementaren Funktionen)**.**

- $(c)' = 0$
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$
- $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$, $a > 0$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, $x > 0$

- $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$, $a \neq 1$, $a > 0$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Fur mehrere Funktionen und Ableitungen sehen Sie die Tabellen A.1 in das Buch.

Beweis.

- Sei $f(x) = x^n$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0^1 + \ldots + x^1 \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0^1 + \ldots + x^1 \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\
&= n \cdot x_0^{n-1}
\end{aligned}$$

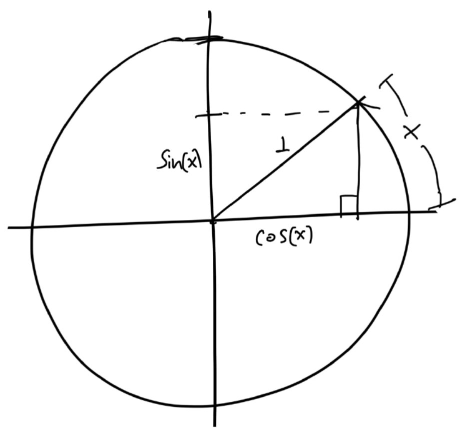
- Wir errechnen:

$$\begin{aligned}
\ln'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right) \\
&= \frac{1}{x_0} \lim_{h \to 0} \cdot \ln\left(\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right)^{\dfrac{x_0}{h}}\right) \\
&= \frac{1}{x_0} \cdot \ln\left(\lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{1}{\left(\dfrac{x_0}{h}\right)}\right)^{\dfrac{x_0}{h}}\right) \\
&= \frac{1}{x_0} \cdot \ln\left(\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{x_0} \cdot \ln(e) \\
&= \frac{1}{x_0}.
\end{aligned}$$

- Wir errechnen: $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \Rightarrow \log_a'(x_0) = \dfrac{1}{\ln(a)}$, $a \neq 1$, $a > 0$.

- Wir zeigen, dass $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$:

  (1) Erste müssen wir die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ und $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$ untersuchen.



Man hat für alle $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ die Ungleichungen:

$$\sin(x) \leq x \leq \sin(x) + 1 - \cos(x).$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1-\cos(x)}{x}.$$

Für die rechte Seite gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos(x)}{x} &= \frac{x}{1+\cos(x)} \cdot \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} \\
&= \frac{x}{1+\cos(x)} \cdot \frac{\sin^2(x)}{x^2} && (\sin(x) \leq x) \\
&\leq \frac{x}{1+\cos(x)} && (\cos(x) \geq 0) \\
&\leq x
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{\sin(x)}{x} \leq x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} 0 \leq 1 - \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x} \leq \lim_{x\to 0^+} x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ und } \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

Analog können wir zeigen, dass $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$ sein.

Deshalb gelten: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$.

(2) Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
\sin'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h)+\sin(h)\cos(x_0)-\sin(x_0)}{h} \\
&= \sin(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x_0)\cdot 0 + \cos(x_0)\cdot 1 \\
&= \cos(x_0).
\end{aligned}$$

- Analog dazu arbeiten wir für die Gleichung $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$.

$\square$

Satz 9.7 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** Ist f differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist f streng monoton und die Ableitung der Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Beweis. Differenzieren wir beide Seiten von $f(f^{-1}(x)) = x$: wir haben von der Kettenregel

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

Zum Beispiel ergibt sich die Ableitung von $y = a^x$ aus

$$\log_a'(y) = \frac{1}{y\cdot \ln(a)}$$

durch Differenzieren beider Seiten der Gleichung $\log_a(a^x) = x$ unter Verwendung der Kettenregel:

$$\frac{1}{a^x\cdot\ln(a)}\cdot(a^x)' = 1 \Leftrightarrow (a^x)' = a^x\cdot\ln(a).$$

$\square$

Beispiel 9.8. Berechnen Sie die Ableitung von

a) $\arcsin(x)$ b) $\arccos(x)$ c) $\arctan(x)$.

Lösung

a) Aus dem Funktionsgraph von $f(x) = \sin(x)$ haben wir, dass $f(x)$ für $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton wachsend ist. Die Ableitung $f'(x) = \cos(x)$ ist daher für $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ungleich 0. Wir verwenden die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion und $f'(x) = \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\cos\left(\arcsin(x)\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin\left(\arcsin(x)\right)\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Analog bekommen wir:

b) $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Differenzieren hilft, Nullstellen zu finden: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Außerdem gebe es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$ (z.B. es gibt, wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gelten (Mittelwertsatz)).

Die Idee ist: Man wählt ein x_0 in der Nähe von ξ und approximiert f in der Umgebung von x_0:

$$f'(x_0) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ist $f'(x_0) \neq 0$, hat man: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Dies ist eine Nullstelle von $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$. Man wiederholt das Verfahren nun für x_0:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ist x_0 gut gewählt, so konvergiert $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \xi$.

Satz 9.9 (Satz von Newton (1642-1727))**.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) zweimal differenzierbar und $f(\xi) = 0$ für ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) \neq 0$. Es gibt ein klein $\delta > 0$ sodass: wenn $|x_0 - \xi| < \delta$, dann $x_n \to \xi$ für $n \to \infty$.

Beispiel 9.10. Bestimmen Sie eine Losung der Gleichung $x^2 = 2$.

Lösung Die Lösungen der Gleichung $x^2 = 2$ sind genau die Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2$. Wir haben $f'(x) = 2x$. Also definieren wir

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_n} \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{2} \cdot \left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \right), x_0 = 1.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 - \frac{-1}{2} = 1.5 \\ x_2 &= 1.5 - \frac{0.25}{3} \\ x_3 &= 1.41422 \\ x_4 &= 1.41421. \end{aligned}$$

Die Zahl x_4 ist aus vier Nachkommastellen exakt mit der Losung $\sqrt{2}$.

10 Taylorreihen

Wir haben gesehen, dass eine Funktion f in der nahe einer Stelle x_0 durch ihre Tangente angenähert werden kann. Oft ist die Approximation durch ein Polynom von Grad 1 aber nicht gut genug. Ist es möglich, dieses Verfahren zu verfeinern, indem man Polynome höheren Grades verwendet? Diese Frage fuhrt uns zu den sogenannten *Taylorpolynomen* bzw. *Taylorreihen*.

Taylor Polynome. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in D$. Setzen wir das Polynom in der Form $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$ an. Die Frage ist nun, wie die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ zu wählen sind, damit die Approximation $f(x) \approx T_n(x)$ gut ist. Für uns $T_n(x)$ ist gut, wenn für $x \to x_0$: $f^{(k)}(x)$ mit $T_n^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, approximieren können. Deshalb müssen die $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, \dots, n$, gelten. Wir errechnen

$$
\begin{aligned}
&T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^1 + \dots + a_n(x - x_0)^n \\
\Rightarrow &T_n'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2(x - x_0)^1 + \dots + n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1} \\
\Rightarrow &T_n^{(2)}(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0)^1 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-2} \\
&\dots \\
\Rightarrow &T_n^{(k)}(x) = k! \cdot a_k + (k+1) \cdots 2 \cdot (x - x_0)^1 + \dots + n \cdots (n-k+1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-k} \\
\dots \\
\Rightarrow &T_n^{(n)}(x) = n! \cdot a_n.
\end{aligned}
$$

Deshalb errechnen wir:

$$f^{(k)}(x_0) = T^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Wir haben also ein einziges solches Polynom $T_n(x)$:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

T_n heißt der <u>Taylorpolynom</u> vom Grad n an der Stelle x_0. Die Stelle x_0 wird auch <u>Entwicklungspunkt</u> genannt.

Der Fehler

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

heißt das <u>Restglied</u>.

Beispiel 10.1. Sei $x_0 = 0$ und $f(x) = e^x$. Dann $f'(x) = e^x$ und $f^{(k)}(x) = e^x$, $k = 2, 3, \dots, n$. Also,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x - 0)^k = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Bemerkung 10.2. Für $x_0 = 0$, $T_n(x)$ heißen <u>Maclaurin Polynome</u> von f.

Satz 10.3 (Satz von Taylor (1685-1731))**.** Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion und T_n das Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt x_0. Dann gibt es ein ξ zwischen x und x_0 sodass:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Bemerkung 10.4.

- Es gibt alternative Formulierungen für diesen Satz. Unseres ist die Lagrange Formulierung.
- Für $n = 0$ liefert der Satz von Taylor der Mittelwertsatz.

Korollar 10.5 (Taylor's Ungleichung)**.** Auch, wenn eine Schranke C von $|f^{(n+1)}|$ in D ist, gilt:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Beweis. $|f^{(n+1)}(x)| \leq C$ für alle $x \in D \Rightarrow |f^{(n+1)}(\xi)| \leq C$. Also folgt die Ungleichung von Taylor. □

Beispiel 10.6. Zeigen Sie, dass dieses Ungleichung gilt:

$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| \leq \frac{x^4}{24}.$$

Lösung

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x) &\Rightarrow f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos(x) &\Rightarrow f'(0) = 1 \\ f^{(2)}(x) = -\sin(x) &\Rightarrow \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos(x) &\Rightarrow \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = -\frac{1}{6} \\ f^{(4)}(x) = \sin(x) &\Rightarrow \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 0. \end{aligned}$$

Also $T_3(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3$ und $|f^{(4)}(x)| = |\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus dem Satz haben wir für $n = 3$:

$$|R_3(x)| = \left|\sin(x) - (x - \frac{x^3}{6})\right| \leq \frac{1}{4}(x - 0)^4 = \frac{1}{24}x^4.$$

Beispiel 10.7. Betrachte

$$\begin{aligned} f : (-1,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \text{ und allgemein } f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k \cdot k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

Wir wählen x_0 und erhalten

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= 1 - x \\ T_2(x) &= 1 - x + x^2 \\ T_3(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 \\ T_4(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4. \end{aligned}$$

Es gilt $f(0.1) = \dfrac{1}{1.1} = 0.9090909\ldots$.
Wir berechnen

$$\begin{aligned} T_1(0.1) &= 0.9 \\ T_2(0.1) &= 0.91 \\ T_3(0.1) &= 0.909 \\ T_4(0.1) &= 0.9091. \end{aligned}$$

Definition 10.8. Für eine beliebig oft differenzierbar Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt die unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Taylorreihe ist eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Deshalb gibt es ein Konvergenzbereich und Konvergenzradius.

Satz 10.9. Wenn $|R_n(x)| \to 0$ für $k \to \infty$, gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Satz 10.10. Eine Taylorreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist innerhalb ihres Konvergenzintervalls $(x_0 - r, x_0 + r)$ beliebig oft stetig differenzierbar. Die Ableitungen können durch gliedweise Differenzieren erhalten werden, wobei der Konvergenzradius gleich ist:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-1}.$$

Satz 10.11 (Wichtige Taylorreihen)**.**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \text{ für } |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \ldots, \text{ für } |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k, \text{ wobei } \binom{a}{k} = \frac{a \cdot (a-1) \cdots (a-k+1)}{k!} \text{ und } a \in \mathbb{R}, \text{ für } |x| < 1.$$

Beweis (für $\sin(x)$ *und* $\cos(x)$*).*

- Für $\sin(x)$:

  Wir haben $f^{(n+1)}(x) = \pm\sin(x)$ oder $\pm\cos(x)$

$$\Rightarrow |f^{(n+1)}(x)| \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{(Nach dem Taylor's Ungleichung)}$$

$$\Rightarrow \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \qquad \text{(Nach dem Satz 10.9)}$$

$$\Rightarrow \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^k.$$

- Für $\cos(x)$:

  Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= (\sin(x))' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)' \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)!} x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 10.12. Nach dem Satz. 10.10 können wir die Taylorreihe von $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ gefunden mit Hilfe von der Taylorreihe von $\ln(1+x)$. Wir berechnen.

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \\
\Rightarrow \ln'(1+x) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k} x^k\right)' \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot x^k.
\end{aligned}$$

Beispiel 10.13. Finden Sie die Maclaurinreihe von $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$.

Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{4-x}} &= (4-x)^{-1/2} \\
&= 2 \cdot \left(1 + \left(-\frac{x}{4}\right)\right)^{-1/2} \\
&= 2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(-\frac{x}{2}\right)^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot \binom{-1/2}{k} \cdot \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot x^k.
\end{aligned}$$

Bemerkung 10.14. $f(x)$ ist nicht immer gleich mit seiner Taylorreihe an x_0, z.B. die folgende Funktion $f(x)$ mit $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Aber die Taylorreihen ist 0 für alle $x \in \mathbb{R}$, also nicht gleich mit $f(x)$.

11 Die Stammfunktion

Im letzten Lektionen haben wir Funktionen differenziert. Wir wollen diese Operation umkehren.

Definition 11.1. Sei $f : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall ist. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ heißt Stammfunktion von f.

Beispiel 11.2. Geben Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 3x^2$ an.

Lösung Wir können erraten, dass ist, denn $(x^3)' = 3x^2$. Aber auch $G(x) = x^3 + 1$ ist eine Stammfunktion von f, da auch $(x^3 + 1)' = 3x^2$ gilt.

Satz 11.3. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, so ist für alle $c \in \mathbb{R}$ auch $F(x) + c$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Insbesondere sind dies alle Stammfunktionen von f.

Beweis. Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$, da konstante Terme beim Ableiten verschwinden. Sei F, G sind zwei Stammfunktionen von f. Dann $(F - G)' = F' = G' = 0$, also muss $(F - G)$ konstant sein. $\square$

Definition 11.4. Die Menge aller Stammfunktionen von f nennt man unbestimmtes Intergral von f und schreibt,

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

wobei F irgendeine Stammfunktion von f und $c \in \mathbb{R}$ eine konstante ist.

- Die Funktion f unter dem Integralzeichen heißt Integrand,
- x heißt die Integrationsvariable, und
- c heißt die Integrationskonstante.

Satz 11.5 (Stammfunktion elementarer Funktionen)**.**

Funktion $f(x)$	Stemmfunktion $F(x)$
c	$c \cdot x$
$x^a \quad (a \neq -1)$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
x^{-1}	$\ln \lvert x \rvert$
e^x	e^x
$a^x \quad (a > 0)$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$.

Satz 11.6 (Linearität)**.** Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen und $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + c$$
$$\int (k \cdot f(x))dx = k \cdot \int f(x)dx + c.$$

Beispiel 11.7. Sei $a, b, r \in \mathbb{R}$ konstanten.

$$\begin{aligned}\int (a \cdot \sin(x) + b \cdot e^x + \frac{r}{x})dx &= \int a \cdot \sin(x)dx + \int b \cdot e^x + \int r \cdot \frac{1}{x}dx \\ &= a \cdot \int \sin(x)dx + b \cdot \int e^x dx + r \cdot \int \frac{1}{x}dx \\ &= a \cdot (-\cos(x)) + b \cdot e^x + r \cdot \ln|x| + c.\end{aligned}$$

Satz 11.8 (Partielle Integration)**.**

$$\int f(x)g'(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)g(x) + c.$$

Beispiel 11.9. Berechnen Sie:

$a)\ \int x \cdot \cos(x)dx \qquad b)\ \int \frac{4\ln(x)}{x}dx$

Lösung

a) Der Integrand ist ein Produkt, daher versuchen wir es mit partieller Integration. Wir wählen $f(x) = x$ und $g'(x) = \cos(x)$. Dann gilt: $f'(x) = 1$, und $g'(x) = \cos(x)$. Dann gilt: $f'(x) = 1$, und wir können $g(x) = \sin(x)$ wählen.

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)dx &= x\sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + c.\end{aligned}$$

Achtung: Wählt man $f(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = x$, erhält man

$$\int x\cos(x)dx = \frac{x^2}{2} \cdot \cos(x) - \int (-\sin(x))\,\frac{x^2}{2}dx + c$$

Der Ausdruck ist komplizierter geworden.

b) Wir setzen $f(x) = 4\ln(x)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$. Es folgt $f'(x) - \frac{4}{x}$ und $g(x) = \ln|x| = \ln(x)$ (weil wir ja $x > 0$ vorausgesetzt haben) und damit

$$\int \frac{4\ln(x)}{x}dx = 4\ln(x)\ln(x) - \int \frac{4\ln(x)}{x} + c.$$

Rechts taucht wieder das zu berechnende Intergal auf. Dann bringen wir dieses Integral einfach auf die linke Seite,

$$2\int \frac{4\ln(x)}{x}dx = 4(\ln(x))^2 + c$$
$$\Rightarrow \int 4\frac{\ln(x)}{x}dx = 2(\ln(x))^2 + c.$$

Satz 11.10 (Integration durch Substitution)**.**

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du + c.$$

Hier wurde $u = g(x)$ substituiert.

Beispiel 11.11. Berechnen Sie:

$$a)\ \int 2x\sin(x^2)dx \qquad b)\ \int \sqrt{3x^2-1}xdx \qquad c)\ \int \frac{x}{x^2+1}dx \qquad d)\ \int \frac{1}{x\ln(x)}.$$

Lösung

a) Wir wählen $f(u) = \sin(u)$ und $g(x = x^2)$ und erhalten mit $u := x^2$ und $g'(x) = \frac{du}{dx} = 2x$.

$$\begin{aligned}\int 2x \cdot \sin(x^2)dx &= \int \sin(u)du \\ &= -\cos(u) + c \\ &= -\cos(x^2) + c,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $u = x^2$ zurücksubstituiert haben

b) Wir substituieren $u = 3x^2 - 1$, damit ist $\frac{du}{dx} = 6x$, also $dx = \frac{1}{6x}du$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3x^2-1} \cdot x \cdot dx &= \int \sqrt{u} \cdot x \cdot \frac{1}{6x}du \\ &= \frac{1}{6}\int \sqrt{u} \\ &= \frac{1}{6}\int u^{1/2}du \\ &= \frac{1}{9}u^{3/2} + c \\ &= \frac{1}{9}(3x^2-1)^{3/2} + c.\end{aligned}$$

c) Wir wählen $f(u) = 1/u$ und $g(x) = x^2 + 1$ und erhalten mit $u := x^2 + 1$ und $g'(x) = 2x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+1} &= \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x}{x^2+1}dx\\ &= \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u}du\\ &= \frac{1}{2}\ln|u|+c\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c.\end{aligned}$$

d) Wir wählen $f(u) = 1/u$ und $g(x) = \ln(x)$, und erhalten mit $u := \ln(x)$ und $g'(x) = 1/x$:

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int\frac{1}{u}du = \ln|u|+c = \ln|\ln(x)|+c.$$

Es gibt Integrale, die mit beiden Techniken lösbar sind, manchmal funktioniert nur eine, manchmal keine, z.B. wenn wir das Integral

$$\int \frac{\sin(x)}{x}dx$$

zu berechnen versuchen. Es hilft, dass nicht nur endliche Summen, sondern auch (konvergente) unendliche Reihe gliedweise integriert werden dürfen.

Satz 11.12. Ist die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0} a_k(x-x_0)^k$$

für $|x-x_0| < r$ konvergent (d.h. ihr Konvergenzradius ist r), so ist auch die Reihe, die durch gliedweise Integration entsteht,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1},$$

für $|x-x_0| < r$ konvergent und eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beispiel 11.13 (Gliedweise Integration einer Potenzreihen)**.** Finden Sie eine Stammfunktion von $\frac{\sin(x)}{x}$ durch gliedweise Integration der zugehörigen Taylorreihe.

Lösung
Es ist:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{x^{2k+1}}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots$$

Diese Reihe ist für alle $x\in\mathbb{R}$ konvergent. Gliedweise Integration dieser Reihe ergibt:

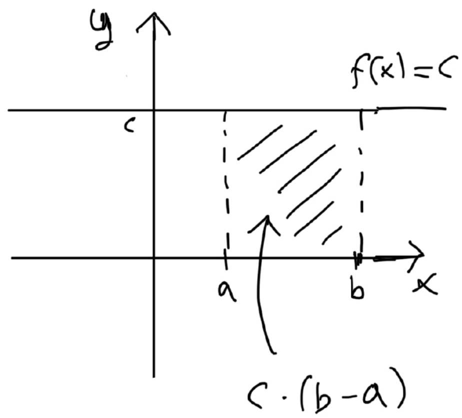
$$\int\frac{\sin(x)}{x}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}x^{2k+1}+c.$$

Das ist die Stammfunktion von $\frac{\sin(x)}{x}$.

12 Bestimmte Integration und uneigentliches Integral

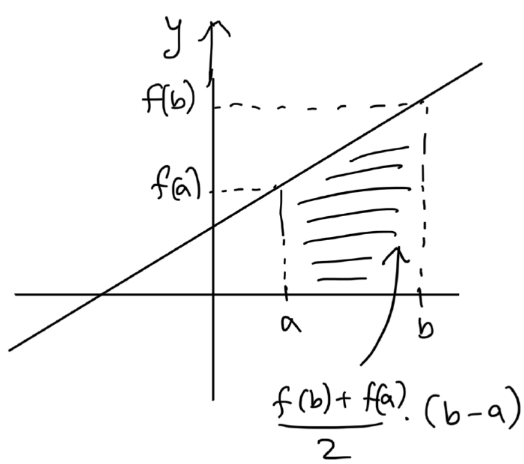
Wir wollen den Flächeninhalt bestimmen, der von einem Graphen einer Funktion und der x-Achse auf einem Intervall eingeschlossen wird.

- Für eine konstante Funktion $f(x) = c$,
  ist dies auf einem Intervall $[a, b]$ sehr leicht, die Flache ist einfach



  Beachte: Der Flächeninhalt ist eine vorzeichenbehaftete Größe: Flachen über der x-Achse zahlen positiv, Flachen unterhalb der x-Achse zahlen negativ zum Gesamtflächeninhalt.

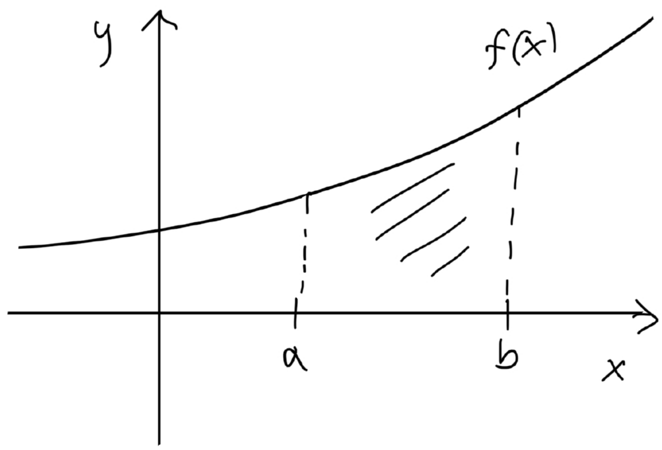
- Für eine Gerade Funktion $f(x) = mx + c$:



Aus dem Trapezoid Formel berechnen wir:

$$\begin{aligned}\frac{f(b)+f(a)}{2}\cdot(b-a) &= \frac{ma+c+mb+c}{2}(b-a)\\ &= \left(\frac{m(a+b)}{2}+c\right)(b-a)\\ &= \frac{m}{2}(b^2-a^2)+c(b-a).\end{aligned}$$

- Für eine Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$,
  können wir den Flächeninhalt nicht so einfach berechnen.



Die Idee ist:

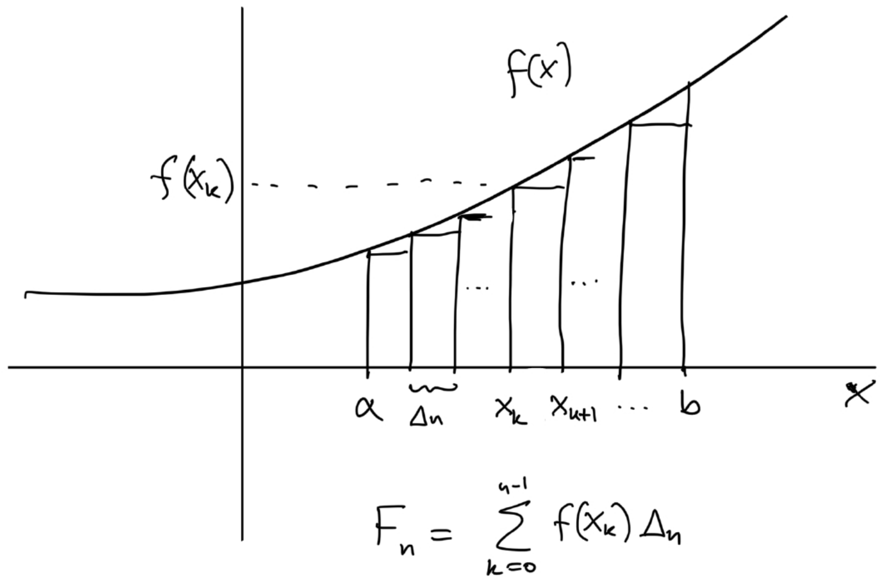
Unterteilen wir das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle gleicher Länge,

$$\Delta_n = \frac{b-a}{n}$$

so ist die Summe der dargestellten Rechtecksflächen gleich:

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_n,$$

wobei: $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta_n$, $x_2 = a + 2\Delta_n$, …, $x_n = a + n\Delta_n = b$.



Machen wir nun die Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ immer feiner, lassen die Anzahl n der Teilintervalle also immer größer werden, so wird die Flache unter dem Funktionsgraphen immer besser durch F_n angenähert. Der Grenzwert, $\lim_{n\to\infty} F_n$ vorausgesetzt er existiert, entspricht also der eingeschlossenen Fläche.

Definition 12.1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann konvergiert die Folge der Rechtecksflächen

$$F_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Delta_n$$

und man nennt den Grenzwert $\underline{\text{bestimmtes Integral von } f}$ auf dem Intervall $[a, b]$ und schreibt

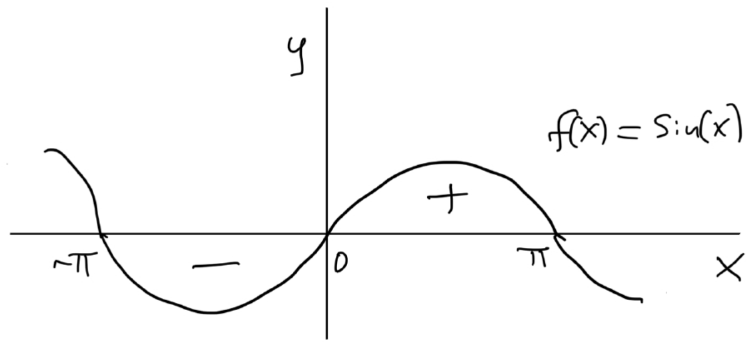
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_n.$$

- $f(x)$ heißt der Integrand von dem Integral.
- a und b heißen unter- und oben-Integrationsgrenze.

Bemerkung 12.2.

- Flachen oberhalb der x-Achse (d.h. $f(x) \geq 0$) Zahlen positiv, Flachen unterhalb negativ zum Integral, z.B.

$$\int_{-\pi}^{0} \sin(x)dx = -2.$$



$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} \sin(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx = -2 + 2 = 0$$

- Es gilt für jedes $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- Außerdem gelten

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \text{ und } \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Satz 12.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F irgendeine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

oder äquivalent

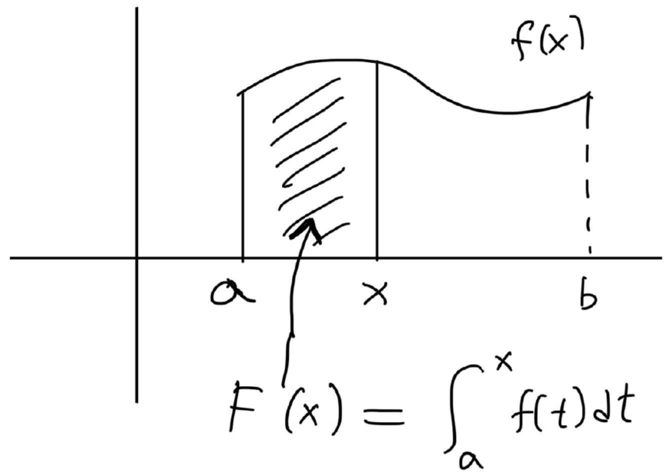
$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x).$$

Idee des Beweises. Wir setzen $F(X) := \int_a^x f(t)dt$ und zeigen, dass für jede $x_0 \in (a, b)$

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

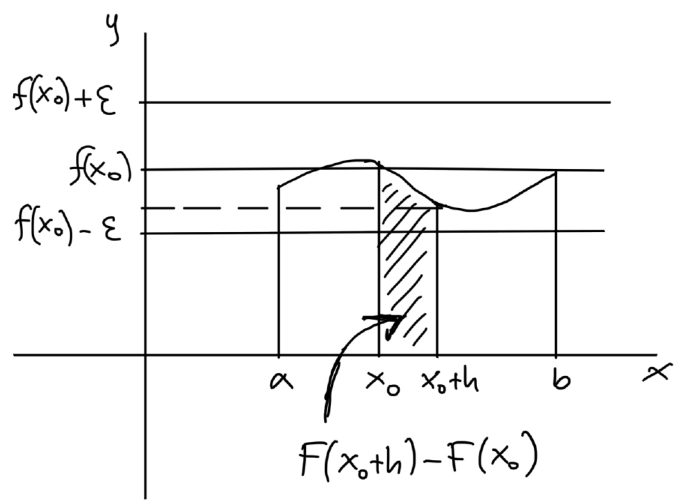
(das ist, $G(X)$ ist Stammfunktion). Wir berechnen

$$F'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$



Wegen der Stetigkeit, für kleine $\varepsilon > 0$ können wir ein $h > 0$ so klein finden, sodass

$$\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h): \ |x - x_0| < h \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



Aus dieser Ungleichung und dem Funktionsgraph haben wir:

$$h \cdot (f(x_0) - \varepsilon) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \cdot (f(x_0) + \varepsilon).$$
$$\Rightarrow f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Lassen wir $h \to 0$, berechnen wir

$$f(x_0) - \varepsilon \leq F'(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Lassen wir $\varepsilon \to 0$, berechnen wir:

$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0).$$

Also $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Beispiel 12.4. Sei $f(x) = mx + c$, dann ist $F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + cx$ eine Stammfunktion und es gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a)\\ &= \frac{mb^2}{2} + cb - \frac{ma^2}{2} - ca\\ &= \frac{m}{2}(b^2 - a^2) + c(b-a).\end{aligned}$$

Dies stimmt mit der vorherigen Betrachtung überein.

Satz 12.5. Sei $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare.

- (Partielle Integration)
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$
- (Substitution)
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du, \text{ mit } u = g(x).$$

Bemerkung 12.6. Für die Substitution f kann nur stetig sein, weil f differenzierbar nicht obligatorisch ist.

Beweis. Die Produktregel der Differenzialrechnung besagt:

- Wir erhalten
$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g'\\ \Rightarrow f' \cdot g &= (f \cdot g)' - f \cdot g'\\ \Rightarrow \int f' \cdot g &= [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f \cdot g'.\end{aligned}$$
- Analog erhalten wir aus der Kettenregel der Differenzialrechnung
$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$
und mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt:
$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x) &= (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a)\\ &= F(g(b)) - F(g(a))\\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 12.7. Berechnen Sie:

$$a) \int_0^1 x \cdot e^x \cdot dx \qquad\qquad b) \int_0^\pi \sin(x^2) \cdot x \cdot dx.$$

Lösung

- Wir setzen $f(x) = x$ und $g'(x) = e^x$ und integrieren partiell: Mit $f'(x) = 1$ und $g(x) = e^x$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot e^x \cdot dx &= [x \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \cdot dx \\ &= 1 \cdot e^{(1)} - 0 \cdot e^{(0)} - [e^x]_0^1 \\ &= e^1 - e^1 + e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

- Mit $x^2 = u = g(x)$ ist $g'(x) = 2x$ und $g(0) = 0$ sowie $g(\pi) = \pi^2$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cdot \sin(x^2) \cdot dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi^2} \sin(u) \cdot du \\ &= \frac{1}{2} [-\cos(u)]_0^{\pi^2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos(\pi^2) + \frac{1}{2} \\ &\approx 0.951. \end{aligned}$$

Definition 12.8.

- Sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und singulär. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)dx$$

existiert, so definiert man

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \to b} f(x)dx.$$

- Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und singulär. Wenn

$$\lim_{c \to a} \int_c^b f(x)dx$$

existiert, so definiert man

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)dx.$$

- Sind beide Randpunkte singulär, so setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

beliebiges $c \in (a, b)$.

Beispiel 12.9.

$a) \int_1^\infty \frac{1}{t^3}dt \qquad b) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx \qquad c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad d) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}.$

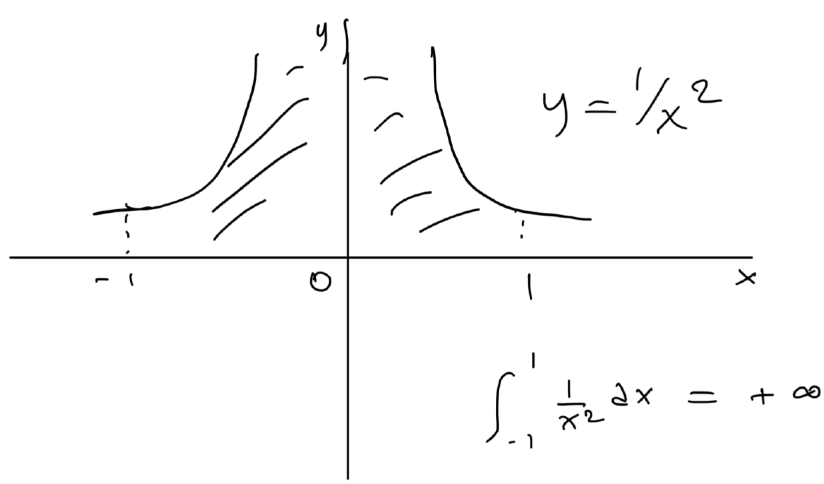
Lösung

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{t^3}dt &= \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{t^3}dt \\ &= \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^c \\ &= \lim_{c\to\infty} \left(-\frac{1}{2c^2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b) Das Problem ist, dass $1/x^2$ nicht stetig an $[-1, 1]$ ist, z.B. für $x = 0$.
Das heißt, können wir nicht machen:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = 2.$$



Es ist falsch!

Man hat:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} &= \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} \\
&= 2 \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} \\
&= 2 \lim_{c \to 0^+} \int_{c}^{1} \frac{dx}{x^2} \\
&= 2 \lim_{c \to 0^+} \left[\left(-\frac{1}{x} \right) \right]_{c}^{1} \\
&= 2 \lim_{c \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{c} \right) \\
&= 2 \cdot (-1 + \infty) \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

c) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int_{0}^{1} x^{-1/2} dx \\
&= \lim_{c \to 0^+} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_{c}^{1} \\
&= \lim_{c \to 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

d) Wir setzen

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= 2 \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= 2 \int_{0}^{\infty} (\arctan(x))' dx \\
&= 2 \arctan(\infty) - 2 \arctan(0) \\
&= 2 \cdot (\pi/2) - 2 \cdot 0 \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

13 Differenzialrechnung in mehreren Variablen (Teil 1)

Bis jetzt haben wir nun Funktionen in einer Veränderlichen betrachtet. Nun werden wir über Funktionen in mehreren Veränderlichen untersuchen.

Der reelle Koordinatenraum der Dimension n, bezeichnet als $\mathbb{R}^n$, ist die Menge

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

der n-Tupel der reellen Zahlen. Jedes n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ steht für einen Punkt in $\mathbb{R}^n$.

Definition 13.1. Eine reellwertige Funktion von mehreren Variablen ist Funktion

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

von einer Teilmenge D des $\mathbb{R}^n$ in die reellen Zahlen.

Notation 13.2. Oft wird für die Variablen die abkürzende Vektornotation $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ verwendet, und man schreibt $f(\vec{x})$ statt $f(x_1, \ldots, x_n)$. Manchmal schreiben wir die Punkte ohne Vektornotation, z.B. als x. Außerdem verwendet wir für die

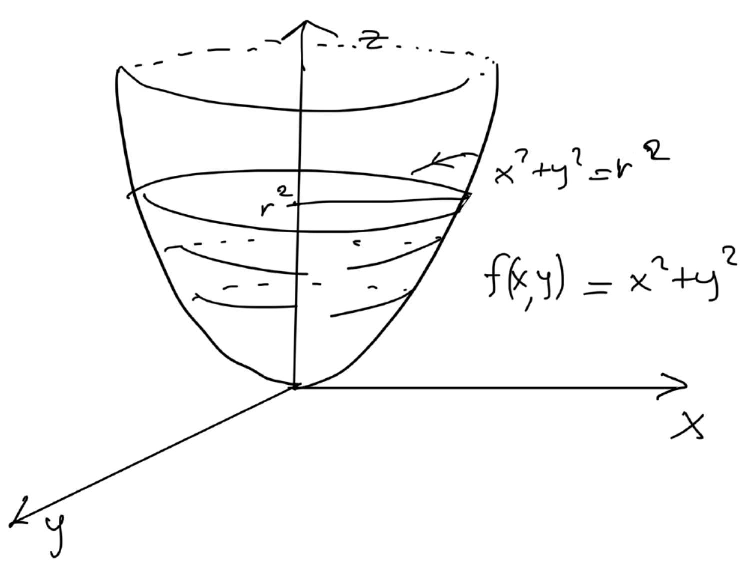
$$(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

die abkürzende Vektornotation $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$. Dann können wir $(x_1, \ldots, x_n)$ als die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} x_i \vec{e_i} = x_1 \vec{e_1} + \ldots + x_n \vec{e_n}$$

ausdrücken.

Beispiel 13.3. Betrachten wir die Funktion von zwei Variablen $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, die jedem Punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ die reelle Zahl $x_1^2 + x_2^2$ zuordnet.



- Wir können uns ihren Graphen

$$\{(x_1, x_2, f(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

  als Fläche im $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen.

- Haben wir drei (oder mehr, z.B. n) Variablen, z.B.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

  so ist der Graph eine Hyper-Fläche im $\mathbb{R}^4$ (oder $\mathbb{R}^{n+1}$).

Wie im Fall von einer Variable ist die Ableitung ein zentraler Begriff. Um sie mathematisch fassen zu können, müssen wir zunächst die Begriffe Abstand, Konvergenz, Grenzwert, und Stetigkeit verallgemeinern.

Abstand: Sei $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnet mit $||\vec{x}||$ der Abstand zwischen die Punkte $O := (0, \ldots, 0)$ und $X := (x_1, \ldots, x_n)$.

Sei $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, betrachtet als Vektoren $\vec{x} = \vec{OX}$, $\vec{y} = \vec{OY}$. Dann der Abstand zwischen ihnen ist $||\vec{XY}|| = ||\vec{OY} - \vec{OX}|| = ||\vec{y} - \vec{x}||$. Außerdem gibt für die $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ einen eindeutigen Winkel $\varphi \in [0, \pi)$ zwischen ihnen. Mithilfe dieses Winkels hat man das Innenprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ von $\vec{x}, \vec{y}$ definieren:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos(\varphi). \end{aligned}$$

Satz 13.4. Wir haben für jede $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

i) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

ii) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \geq 0$

iii) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$

iv) $\lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle$

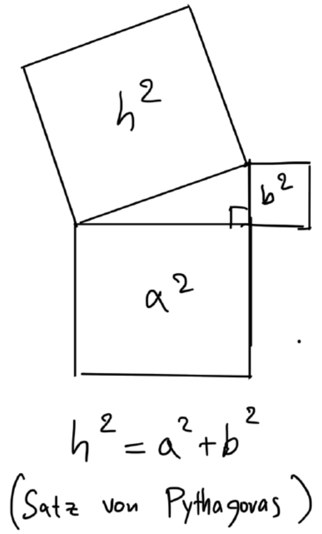
v) $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$.

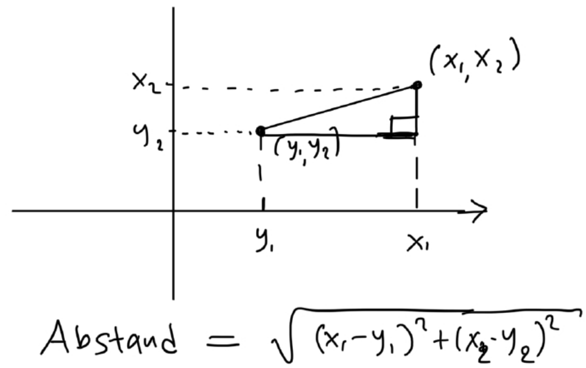
Satz 13.5 (Satz des Pythagoras für $\mathbb{R}^n$)**.** In die euklidische Raum

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

der Abstand zwischen zwei Punkten wird mit der euklidischen Norm gemessen. Das heißt, wenn wir $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ haben, dann den Abstand ist:

$$||\vec{y} - \vec{x}|| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$





Beweis. Für jede $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}
||\vec{x}||^2 &= ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{x}|| \cdot \cos(0) \\
&= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \\
&= \langle (x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle \qquad \text{(nach dem Satz. 13.4)} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot \delta_{i,j} \qquad \text{(wobei } \delta_{ij} = 1 \text{ wenn } i = j \text{ gilt, und } 0 \text{ wenn } i \neq j \text{ gilt)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2.
\end{aligned}$$

Also

$$||\vec{y} - \vec{x}|| = ||(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)|| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

□

Satz 13.6. Der Innenprodukt zwischen zwei Punkten $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1 \ldots, y_n)$ wird mit dem Skallarprodukt $\vec{x} \bullet \vec{y}$ gemessen. Das ist:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_n \cdot y_n.$$

Beweis. Übung □

Konvergenz: Wir definieren den Begriff der Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ analog zu Definition von Konvergenz in $\mathbb{R}$, wobei wir den Betrag durch die Norm ersetzen.

Definition 13.7. Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}^n$ heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\,(||a_n - a|| < \varepsilon)\,.$$

Wir schreiben:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oder } a_n \xrightarrow{n\to\infty} a.$$

Beispiel 13.8. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{k} \\ \frac{2k}{k+1} \end{pmatrix}.$$

Lösung Die erste Komponente $1 - \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 1$ und die zweite Komponente $\frac{2k}{k+1}$ konvergiert gegen 2, somit gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Grenzwert $\&$ **Stetigkeit:** Wir verallgemeinern Definitionen von Grenzwert und Stetigkeit auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 13.9. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion in n Variablen, y_0 heißt Grenzwert von f für x gegen $x_0 \in D$, falls für jede Folge (x_k) die gegen x_0 konvergiert, gilt: $f(x_k)$ konvergiert gegen y_0. Wir schreiben wie gewohnt

$$\lim_{x_k\to x_0} f(x_k) = y_0 \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x\to x_0} y_0.$$

Definition 13.10. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$ falls

$$\lim_{x_k\to x_0} f(x_k) = f(x_0).$$

Gilt das für jedes $x_0 \in D$, so sagen wir, dass die Funktion f stetig ist.

Analog zu Funktionen gilt:

Satz 13.11.

- Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist stetig
- Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, so ist auch $f \pm g$ und $f \cdot g$
- Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig an $x_0 \in D$ und $g(x_0) \neq 0$, so ist auch f/g stetig an x_0.

Analog wie zuvor definieren wir Grenzwert und Stetigkeit auch für vektorwertige Funktionen. Dabei fasst man eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (wobei $f = (f_1, \ldots, f_m)$) auf als in Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

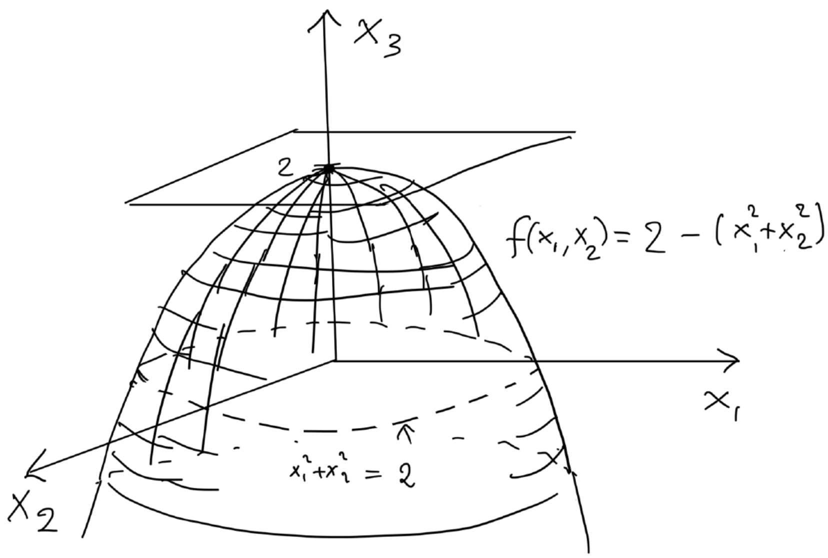
Satz 13.12. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist stetig in $x_0 \in D$ genau dann, wenn jede Komponente f_i stetig in x_0 ist.

Die Motivation bei der Einführung der Differenzialrechnung war, beliebige Funktionen durch lineare Funktionen zu approximieren.

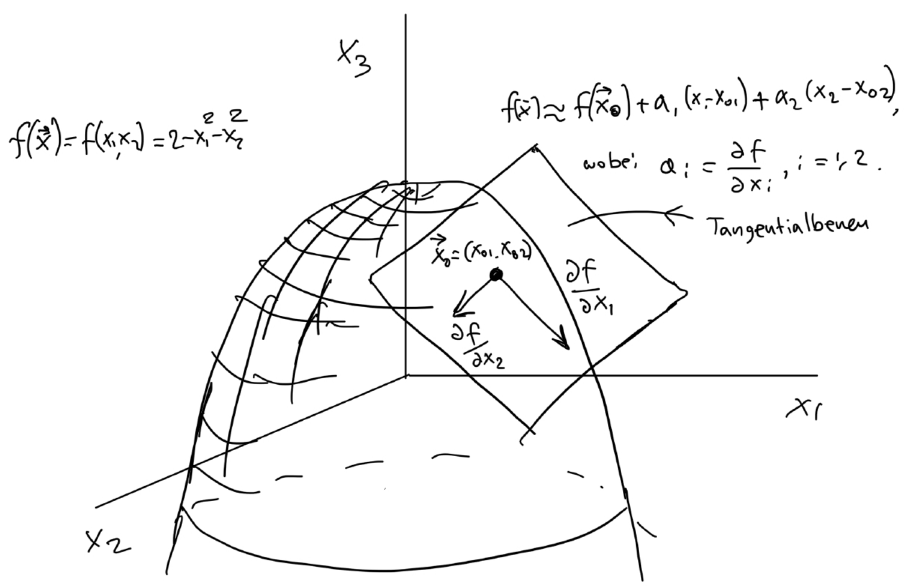
14 Differenzialrechnung in mehreren Variablen (Teil 2)

Heute sprechen wir über die Ableitung einer Funktion in mehreren Variablen.

Betrachten Sie die Funktion in zweite Variablen $f(x_1, x_2) = 2 - (x_1^2 + x_2^2)$.



Für eine Funktion, die nur von einer Variable abhängt, haben wir die Ableitung definiert, indem wir die Funktion durch eine Gerade, die Tangente, approximiert haben. Analog können wir für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ versuchen, Sie an der Stelle x_0 durch eine Hyper-Ebene zu approximieren.



Zum Beispiel für $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$ und ein Punkt $\vec{x_0} = (x_{0,1}, x_{0,2})$ gibt es ein

Tangentialebenen als die besten $f(\vec{x})$ mit Ebene approximieren:

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x_0}) + a_1(x_1 - x_{0,1}) + a_2(x_2 - x_{0,2}).$$

Diese optimale a_i, $i = 1, 2$, sind die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$ von f.

Definition 14.1. Unter der partiellen Ableitung $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ der Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ versteht man die Ableitung von f nach der Variablen x_j, wahrend man die restlichen Variablen als konstante auffasst:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x_0}) = g_j'(x_{0,j}), \text{ wobei}$$
$$g_j(x_j) = f(x_{0,1}, \ldots, x_{0,j-1}, x_j, x_{0,j+1}, \ldots, x_{0,n}).$$

Beispiel 14.2. Sei $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2$. Dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) = 2x_1x_2 - 2x_2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x, y) = x^2 + 2x_2 - 2x_1.$$

Definition 14.3. Für eine Funktion $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deren partielle Ableitungen sämtlich existieren, ist die Jacobi-Matrix die Matrix der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ist die Jacobi-Matrix stetig (in jede Komponente stetig), so heißt f stetig differenzierbar.

Partielle Ableitungen lassen wir sich vertauschen.

Satz 14.4. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Satz 14.5. $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt differenzierbar an $\vec{x_0} \in D$, falls es eine $m \times n$-Matrix $A(\vec{x_0})$ gibt, heißt Ableitung an x_0, sodass

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \frac{||f(\vec{x}) - f(\vec{x_0}) - A(\vec{x_0})(\vec{x} - \vec{x_0})||}{||\vec{x} - \vec{x_0}||} = 0.$$

Dann $A(\vec{x_0})$ ist der Jacobi-Matrix.

Satz 14.6 (Kettenregel)**.** Sind $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\vec{g} : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar an der Stelle $\vec{x_0} \in D$ bzw. $\vec{y_0} = f(\vec{x_0}) \in E$, dann ist auch die Verkettung $\vec{g} \circ \vec{f}$ differenzierbar an der Stelle $\vec{x_0}$ und die Ableitung ist das Produkt der Jacobi-Matrizen:

$$\frac{\partial(\vec{g} \circ \vec{f})}{\partial \vec{x}}(\vec{x_0}) = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{y_0}) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x_0})$$

Beispiel 14.7. Berechnen Sie die Ableitung von $\sin(x_1^2 + x_2^2)$ mit der Kettenregel.

Lösung

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, g(y) = \sin(y) \Rightarrow g(f(x_1, x_2)) = \sin(x_1^2 + x_2^2).$$

Auch

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \cos(y), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = (2x_1 \quad 2x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g \circ f}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \cos(x_1^2 + x_2^2)(2x_1 \quad 2x_2) = \big(2x_1 \cos(x_1^2 + x_2^2) \quad 2x_2 \cos(x_1^2 + x_2^2)\big)$$

Satz 14.8. Ist f differenzierbar in $\vec{x_0}$, so ist f stetig in $\vec{x_0}$.

Wir fragen uns nun, wie wir Extrempunkte der Funktion f finden können. Analog wie in Fall einer Variablen (Satze 9.3,9.4) bildet die Ableitung den Schlüssel zu diesem Problem.

Definition 14.9. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Der transportierte

$$\mathbf{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

heißt Gradienten von f.

Satz 14.10 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)**.** An einem lokalen Minimum oder Maximum $\vec{x_0}$ einer differenzierbaren Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ muss der Gradient verschwinden,

$$\mathbf{grad} f(\vec{x_0}) = \vec{0}.$$

Beispiel 14.11. Sei $f(x_1, x_2) = x^2 x_2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$. Dann betrachten wir

$$\mathbf{grad} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 - 2x_2 \\ \\ x_1^2 + 2x_2 - 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 0).$$

Aber wir sind nicht sicher, ob $(0, 0)$ ein Extremum ist. Wir brauchen dafür, die zweiten Ableitungen zu untersuchen.

Definition 14.12. Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt die Hesse-Matrix von f.

Satz 14.13. Die Funktion f hat in $\vec{x_0}$ ein Maximum (bzw. Minimum), falls $\mathbf{grad} f(\vec{x_0}) = 0$ ist und $\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2}(\vec{x_0})$ negativ (bzw. positiv) definit ist, das heißt, falls

$$\vec{a}^T \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2}(\vec{x_0}) \cdot \vec{a} < 0 \text{ (bzw. } > 0)$$

für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

Satz 14.14. Nur für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt:

- Verschwindet der Gradient von f in x_0 und ist die die Determinante der Hesse-Matrix positiv, so liegt ein Extremum vor, und zwar ein Minimum (bzw. Maximum), falls

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} > 0 \text{ (bzw. } < 0)$$

  ist.

- Ist die Determinante der Hesse-Matrix negativ, so liegt ein Sattelpunkt vor.

- Ist die Determinante der Hesse-Matrix null, so ist keine Aussage möglich.

Satz 14.15. Eine quadratische, symmetrische Matrix ist positiv (bzw. negativ) definit, falls alle Eigenwerte positiv (bzw. negativ) sind.

Beispiel 14.16. $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$ sind die Eigenwerte der Hesse-Matrix

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} := \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 2 & 2 \end{pmatrix}$$

im Punkte $(0,0)$ $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$. Die Matrix ist also weder positiv noch negativ definiert, denn die Eigenwerte haben verschiedene Vorzeichen. Aber: Die Determinante der Hesse-Matrix für $\vec{x_0} = (0,0)$ ist $-4 < 0$ und somit liegt bei: $(0,0)$ ein Sattelpunkt vor.

Warnung: Diese Argumente funktionieren wirklich nur in $\mathbb{R}^2$.