Universität Bremen

Prof. Dr. Anastasios Stefanou
Sommersemester 2023

Mathe 2

Blatt P13 Musterlösung

Gruppe: Mathe 2 Tutor:innen

Präsenzübungen

P1 Berechnen Sie alle 1. und 2. partiellen Ableitungen von

a) $f(x,y) = x + 3y - 7$

Die ersten Ableitungen:

- $x + 3y - 7 \frac{\partial}{\partial x} = 1$
- $x + 3y - 7 \frac{\partial}{\partial y} = 3$

Und anschließend die zweiten Ableitungen:

- $x + 3y - 7 \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} = 0$
- $x + 3y - 7 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 0$
- $x + 3y - 7 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = 0$
- $x + 3y - 7 \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} = 0$

b) $g(x,y) = \sin(xy)$

Die ersten Ableitungen:

- $\sin(xy) \frac{\partial}{\partial x} = y\cos(xy)$
- $\sin(xy) \frac{\partial}{\partial y} = x\cos(xy)$

Und anschließend die zweiten Ableitungen:

- $\sin(xy) \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} = -y^2 \sin(xy)$
- $\sin(xy) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = -xy\sin(xy) + \cos(xy)$
- $\sin(xy) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = -xy\sin(xy) + \cos(xy)$
- $\sin(xy) \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} = -x^2 \sin(xy)$

c) $h(x,y,z) = x^2y + xy^2 + xyz^3$

Die ersten Ableitungen:

- $x^2y + xy^2 + xyz^3 \frac{\partial}{\partial x} = 2xy + y^2 + yz^3$
- $x^2y + xy^2 + xyz^3 \frac{\partial}{\partial y} = x^2 + 2xy + xz^3$
- $x^2y + xy^2 + xyz^3 \frac{\partial}{\partial z} = 3xyz^2$

Und anschließend die zweiten Ableitungen:

- $x^2y + xy^2 + xyz^3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} = 2y$
- $x^2y + xy^2 + xyz^3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 2x + 2y + z^3$
- $x^2y + xy^2 + xyz^3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} = 3yz^2$
- $x^2y + xy^2 + xyz^3 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = 2x + 2y + z^3$
- $x^2y + xy^2 + xyz^3 \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} = 2x$
- $x^2y + xy^2 + xyz^3 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} = 3xz^2$
- $x^2y + xy^2 + xyz^3 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} = 3yz^2$
- $x^2y + xy^2 + xyz^3 \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} = 3xz^2$
- $x^2y + xy^2 + xyz^3 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z} = 6xyz$

P2 Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von $f(x, y) = \sin(x + y)$.

Die Hesse Matrix ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Es müssen also beide erste Ableitungen und alle vier zweiten Ableitungen berechnet werden.

Die ersten Ableitungen:

- $\sin(x + y) \frac{\partial}{\partial x} = \cos(x + y)$
- $\sin(x + y) \frac{\partial}{\partial y} = \cos(x + y)$

Und anschließend die zweiten Ableitungen:

- $\sin(x + y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} = -\sin(x + y)$
- $\sin(x + y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = -\sin(x + y)$
- $\sin(x + y) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = -\sin(x + y)$
- $\sin(x + y) \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} = -\sin(x + y)$

Damit

$$\sin(x + y) \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2} = \begin{pmatrix} -\sin(x + y) & -\sin(x + y) \\ -\sin(x + y) & -\sin(x + y) \end{pmatrix}$$

P3 Finden Sie alle lokalen Extrema von $f(x, y) = x^4 + x^2 + y^2 - 2x$.

Zuerst finden wir den Gradienten der Funktion:

$$\mathsf{grad}(f) := \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right)^T = \begin{pmatrix} f \frac{\partial}{\partial x} \\ f \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Wir haben die ersten Ableitungen:

- $x^4 + x^2 + y^2 - 2x \frac{\partial}{\partial x} = 4x^3 + 2x - 2$
- $x^4 + x^2 + y^2 - 2x \frac{\partial}{\partial y} = 2y$

Es muss nun gelten

$$\mathsf{grad} f = \begin{pmatrix} 4x^3 + 2x - 2 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es lässt sich sofort $y = 0$ ablesen. Es bleibt alle x mit $4x^3 + 2x - 2 = 0$ zu finden. Dies gilt nur für

$$x = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{87}}{36}} - \frac{1}{\sqrt[3]{6(9 + \sqrt{87})}} \approx 0.58975$$

Damit ist $(0.58975, 0)$ der Extrempunkt der Funktion.