Universität Bremen

Prof. Dr. Anastasios Stefanou
Sommersemester 2023

Mathe 2

Blatt P5 Musterlösung

Gruppe: Mathe 2 Tutor:innen

Konvergenz:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Cauchy-Kriterium:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Präsenzübungen

P1 Überprüfen Sie die folgenden Folgen Konvergenz, Monotonie, Beschränktheit; geben Sie ggf. den Grenzwert an:

a) $a_1 = a_2 = 1$, für $n \geq 3$: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Diese Folge ist auch als Fibonacci-Reihe bekannt. Die Folge ist monoton steigend (bis auf a_1, a_2 sogar streng). Die Folge ist unbeschränkt. Einen Grenzwert gibt es daher nicht.

b) $a_n = \frac{1}{n^2}$ für $n > 0$

Die Folge ist konvergent. Sie fällt streng monoton und ist mit 0 nach unten beschränkt. Der Grenzwert ist 0.

c) $a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n \geq 0$

Die Folge ist konvergent. Sie steigt monoton, ist nach Oben beschränkt. Der Grenzwert ist 2.

P2 Sei die Folge (a_n) konvergent mit Grenzwert a und sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n^k) gegen a^k konvergiert.

Beweis per vollständiger Induktion:

$\boxed{\text{IA}}$ $k = 1$:
$\lim_{n\to\infty}(a_n^k) = \lim_{n\to\infty}(a_n^1) = \lim_{n\to\infty}(a_n) = a = a^1 = a^k$

$\boxed{\text{IS}}$ $k \to k + 1$:
$\lim_{n\to\infty}(a_n^{k+1}) = \lim_{n\to\infty}(a_n^k \cdot a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n^k) \cdot \lim_{n\to\infty}(a_n) = a^k \cdot a = a^{k+1}$.
Nach der $\boxed{\text{IV}}$ ist $\lim_{n\to\infty}(a_n^k) = a^k$. Dadurch kann dann Satz 5.11.i) verwendet werden.

P3 Ist die Folge

$$a_n = \frac{1}{3n^2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

konvergent? Wenn ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

Die Folge $\frac{1}{3n^2}$ ist konvergent gegen den Grenzwert 0.
Die Folge $(1 - (\frac{1}{2})^2)$ ist konvergent mit dem Grenzwert 1.
Nach Satz 5.11.i) ist somit der Grenzwert des Produktes 0.

P4 Geben Sie weitere Beispiele für konvergente und divergente Folgen an. Finden Sie insbesondere verschiedene konvergente Folgen, die gegen den selben Grenzwert konvergieren.

An der Tafel Sammeln