Universität Bremen

Prof. Dr. Anastasios Stefanou
Sommersemester 2023

Mathe 2

Blatt P7 Musterlösung

Gruppe: Mathe 2 Tutor:innen

- Cauchy-Kriterium (Lemma 7.6):
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 : \left(\sum_{k=n}^{m} a_k < \varepsilon \right)$$

- Leibniz Kriterium (Lemma 7.10):
Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist die Reihe $\sum(-1)^k(a_k)$ konvergent.

- Majorantenkriterium (Satz 7.12):
Gilt $0 \leq |a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq n_0$ und ist $\sum b_k$ eine konvergente Reihe, so konvergiert die Reihe a_k absolut.

- Minorantenkriterium (Satz 7.13):
Gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k < n_0$ und ist die Reihe $\sum a_k$ divergent, so divergiert auch die Reihe $\sum b_k$.

- Quotientenkriterium (Satz 7.17):
Gegebe sei die Reihe $\sum a_n$. Gilt für alle $n > n_0 : a_n \neq 0$ und gibt es ein festes $0 < q < 1$, sodass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$, so konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut.

- Wurzelkriterium (Satz 7.19):
Gegeben sei die Reihe $\sum a_n$. Gibt es ein festes $q < 1$, sodas für alle $n > n_0$ gilt: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, so konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut.

Präsenzübungen

P1 Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Welche der konvergenten Reihen sind absolut konvergent?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Nach dem Minorantenkriterium ist die Reihe divergent.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \\
&= \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) - 1
\end{aligned}$$

Da $\sum \frac{1}{n}$ divergiert und eine Unterschranke ist, divergiert auch diese Reihe nach dem Minorantenkriterium.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, wobei $x_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n \text{ gerade} \\ 3^{-n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Es gilt $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : x_n \leq 2^{-n}$.
Da $\sum 2^{-n}$ gegen 1 konvergiert (bzw. gegen 2, je nach dem Startwert für n), konvergiert diese Reihe auch nach dem Majorantenkritierium.
Der Grenzwert dieser Reihe ist $\frac{17}{24}$.

P2 Geben Sie zwei (von denen aus der Vorlesung verschiedene) Beispiele konvergenter Reihen an, die nicht absolut konvergent sind.

P3 Überprüfen Sie die folgenden Reihen mittels eines geeigneten Kriteriums auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+1}$

Nach dem Leipnizkriterium konvergiert diese Reihe.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)+\cos^2(n)}{n^3}$

Eine Oberschranke für $\sin(n)+\cos^2(n)$ ist 2. Da die Reihe $\sum \frac{2}{n^3} = 2\sum \frac{1}{n^3}$ konvergiert, folgt mit dem Majorantenkriterium auch die Konvergenz.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}n)}{n^2}$

$\cos(\frac{\pi}{2}n)$ lässt sich nach oben durch 1 begrenzen.
$\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Somit greift das Majorantenkriterium.

d) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2+3i}\right)^n\right)$

$\frac{2}{2+3i} = \frac{2(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = 2\frac{2-3i}{4+9} = 2\frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13}(2-3i).$
Damit also

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2+3i}\right)^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{13}\right)^n (2-3i)^n\right)$$

Der Grenzwert ist $1 - \frac{2}{3}i$