Prof. Dr. Anastasios Stefanou
Sommersemester 2023

Mathe 2
Blatt P8 Musterlösung

Gruppe: Mathe 2 Tutor:innen

Präsenzübungen

P1 Bestimmen Sie, für welche Werte $z \in \mathbb{C}$ die folgende Potenzreihe konvergiert:

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(z-(1+i))^n.$$

Wir haben den komplexen Entwicklungspunkt $z_0 = (1+i)$ und die Folge $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{n+1}\right| \\ &= 0\end{aligned}$$

Die Potenzreihe konvergiert also für alle Zahlen, also $r = \infty$.

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2(n!)}.$$

Wir haben den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und die Folge $a_n = \frac{1}{2(n!)}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2((n+1)!)}}{\frac{1}{2(n!)}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(n!)}{2((n+1)!)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| \\ &= 0\end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert also für alle $z \in \mathbb{C}$.

P2 Bestimmen Sie, für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ die folgende Potenzreihe konvergiert:

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 (x-2)^n.$$

Der Entwicklungspunkt ist 2 und die Folge $a_n = n^3$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^3}{n^3} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \right| \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| \right)^3 \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \left| 1 + \frac{1}{n} \right| \right)^3 \\
&= \left(1 + \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \right| \right)^3 \\
&= (1+0)^3 \\
&= 1 = q
\end{aligned}$$

Die Potenzreihe konvergiert also für alle x mit $|x-2| < \frac{1}{q} = 1$. Daraus folgt, dass die Reihe für alle $1 < x < 3$ konvergiert.

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} x^n$$

Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = 0$ und die Folge $a_n = \frac{n+2}{2^n}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+2}{2^n}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{((n+1)+2)2^n}{(n+2)2^{n+1}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)+2}{(n+2)2} \right| \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+2)+1}{(n+2)} \right| \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{n+2} + \frac{1}{n+2} \right| \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} |1+0| \\
&= \frac{1}{2} = q
\end{aligned}$$

Die Potenzreihe konvergiert also für alle x mit $|x-0| < \frac{1}{q} = 2$. Daraus folgt, dass die Reihe für alle $-2 < x < 2$ konvergiert.