Universität Bremen

Prof. Dr. Anastasios Stefanou
Sommersemester 2023

Mathe 2
Blatt P9 Musterlösung

Gruppe: Mathe 2 Tutor:innen

Präsenzübungen

P1 Bestimmen Sie die erste Ableitung der beiden folgenden Abbildungen:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \exp(x \cdot \sin(x))$

Wir verwenden die Ableitungsregeln aus Satz 9.5.
Hier wenden wir die Regeln

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) &= f'(g(x_0))g'(x_0)\\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

an.
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}(\exp(x\sin(x)))' &= \exp(x\sin(x))(x\sin(x))'\\ &= \exp(x\sin(x))(1\sin(x) + x\cos(x))\\ &= \exp(x\sin(x))(\sin(x) + x\cos(x))\end{aligned}$$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (2 + \sin(x)\cos(x))^{3x}$

Wir verwenden die Regeln

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) &= f'(g(x_0))g'(x_0)\\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\\ (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0)\\ \left(f(x)^{g(x)}\right)' &= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left((2+\sin(x)\cos(x))^{3x}\right)' &= (2+\sin(x)\cos(x))^{3x}\left((3x)'\cdot\ln(2+\sin(x)\cos(x)) + \frac{3x\cdot(2+\sin(x)\cos(x))'}{2+\sin(x)\cos(x)}\right)\\ &= (2+\sin(x)\cos(x))^{3x}\left(3\cdot\ln(2+\sin(x)\cos(x)) + \frac{3x\cdot(2+\sin(x)\cos(x))'}{2+\sin(x)\cos(x)}\right)\\ &= 3\,(2+\sin(x)\cos(x))^{3x}\left(\ln(2+\sin(x)\cos(x)) + \frac{x\cdot(2+\sin(x)\cos(x))'}{2+\sin(x)\cos(x)}\right)\\ &= 3\,(2+\sin(x)\cos(x))^{3x}\left(\ln(2+\sin(x)\cos(x)) + \frac{x\cdot((2)' + (\sin(x)\cos(x))')}{2+\sin(x)\cos(x)}\right)\\ &= 3\,(2+\sin(x)\cos(x))^{3x}\left(\ln(2+\sin(x)\cos(x)) + \frac{x\cdot\left(\sin^2(x) - \cos^2(x)\right)}{2+\sin(x)\cos(x)}\right)\end{aligned}$$

P2 Geben Sie eine geometrische Interpretation des Satzes von Rolle und des ersten Mittelwertsatzes an.

a) Satz von Rolle (9.1) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei daüber hinaus f differenzierbar auf (a,b) und gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.
b) Erster Mittelwertsatz (9.2) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei darüber hinaus f differenzierbar auf (a,b). Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

P3 Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle Punkte x, bei denen die 1. Ableitung $f'(x) = 0$ ist (falls es solche gibt):

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x - 6$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2 + 5x - 10$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\sin(x) + x$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 7$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$

a)

$$f'(x) = 5$$

Die Ableitung hat keine Nullstellen.

b)

$$f'(x) = 6x + 5$$

Die Ableitung hat eine Nullstelle an $x = -\frac{5}{6}$.

---

c)

$$f'(x) = 2\cos(x) + 1$$

Die Ableitung hat Nullstellen an $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, also für alle Punkte $x_n = \cos^{-1}(-\frac{1}{2}) + 2n\pi = \frac{2\pi(1+3n)}{3}\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$.

d)

$$f'(x) = 3x^2$$

Die Ableitung hat eine Nullstelle für $x = 0$.

---

e)

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 1$$

Nach der pq-Formel sind die Nullstellen

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Also $x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$.