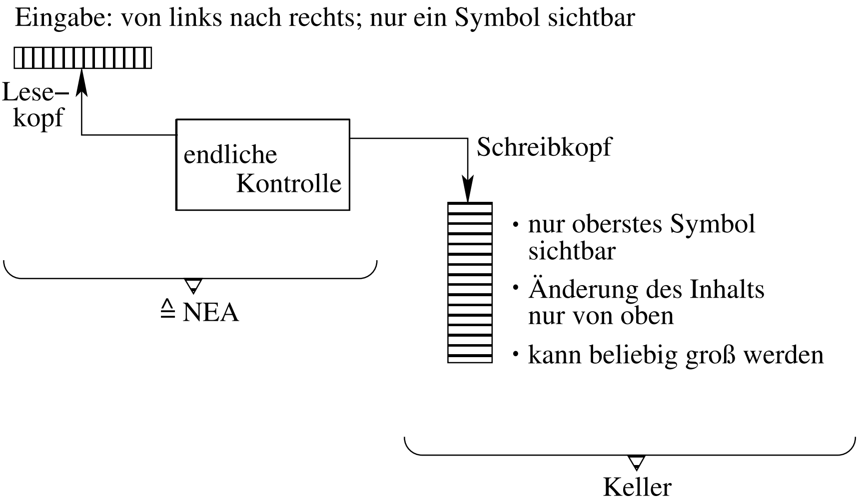
Theoretische Informatik 1

WiSe 23/24

Prof. Dr. Sebastian Siebertz
AG Theoretische Informatik
MZH, Raum 3160
siebertz@uni-bremen.de

Universität
Bremen

Kellerautomaten



Definition Kellerautomat

Definition Kellerautomat

Ein *Kellerautomat (pushdown automaton, kurz PDA)* ist ein Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_s, Z_s, \Delta, F)$, wobei

- Q eine endliche Menge von *Zuständen* ist,
- Σ das *Eingabealphabet* ist,
- Γ das *Kelleralphabet* ist,
- $q_s \in Q$ der *Anfangszustand* ist,
- $Z_s \in \Gamma$ das *Kellerstartsymbol* ist,
- $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Q$ eine endliche *Übergangsrelation* ist und
- $F \subseteq Q$ eine Menge von *akzeptierenden Zuständen* ist.

Die Übergangsrelation

- Die Übergangsrelation $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Q$.
- (q, a, Z, γ, q') bedeutet:
  - Im Zustand q
  - mit aktuellem Eingabesymbol a
  - und oberstem Kellersymbol Z
  - darf der Automat Z auf dem Keller durch γ ersetzen,
  - in den Zustand q' wechseln
  - und zum nächsten Eingabesymbol übergehen.
- $(q, \varepsilon, Z, \gamma, q')$: wie oben, aber
  - das aktuelle Eingabesymbol ist nicht relevant
  - und wir gehen nicht zum nächsten Eingabesymbol (der Lesekopf ändert seine Position nicht).

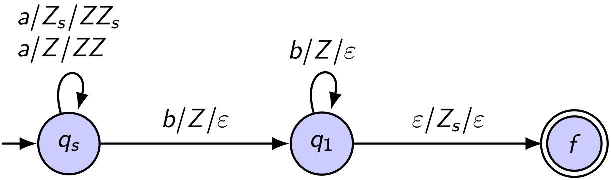
Akzeptanz eines Kellerautomaten

- Ein Kellerautomat akzeptiert ein Wort $w \in \Sigma^*$, wenn er das ganze Wort gelesen hat und seine Berechnung in einem akzeptierenden Zustand endet.

Beispiel

- Ein PDA für $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.

Erinnerung: **Übergangsrelation** $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Q$.



- $(q_s, aabb, Z_s) \vdash_{\mathcal{A}} (q_s, abb, ZZ_s) \vdash_{\mathcal{A}} (q_s, bb, ZZZ_s) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, b, ZZ_s) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, \varepsilon, Z_s) \vdash_{\mathcal{A}} (f, \varepsilon, \varepsilon)$ – *akzeptiert*.
- $(q_s, aab, Z_s) \vdash^*_{\mathcal{A}} (q_s, b, ZZZ_s) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, \varepsilon, ZZ_s)$ – *nicht akzeptiert*.
- $(q_s, abb, Z_s) \vdash_{\mathcal{A}} (q_s, bb, ZZ_s) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, b, Z_s) \vdash_{\mathcal{A}} (f, b, \varepsilon)$ – *nicht akzeptiert* (weil das Wort nicht zu Ende gelesen wurde – „b" in (f, b, ε))

Akzeptanz per leerem Keller

Akzeptanz per leerem Keller

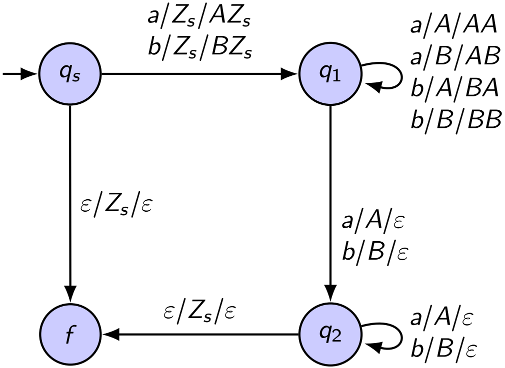
- Ein *PDA mit Akzeptanz per leerem Keller* ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_s, Z_s, \Delta),$$

  wobei alle Komponenten wie für PDAs sind.
- Ein solcher PDA akzeptiert ein Eingabewort $w \in \Sigma^*$ wenn er das ganze Wort gelesen hat, seine Berechnung in einem beliebigen Zustand endet und er den Keller vollständig geleert hat.

Beispiel für Akzeptanz mit leerem Keller

- Ein PDA mit Akzeptanz per leerem Keller für $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ (wobei für $w = a_1 \cdots a_n$ gilt $w^R = a_n \cdots a_1$).



Akzeptanz per leerem Keller

Satz

Jede Sprache L, die von einem PDA (mit akzeptierenden Zuständen) akzeptiert wird, wird auch von einem PDA mit Akzeptanz per leerem Keller akzeptiert und umgekehrt.

Kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten

Satz

Für jede formale Sprache L sind äquivalent:

1) L wird von einer kontextfreien Grammatik erzeugt.
2) L wird von einem PDA akzeptiert.

Abschluss unter Schnitt

- Die kontextfreien Sprachen sind nicht unter Schnitt abgeschlossen.
- Beispiel:
  - $L_1 = \{a^i b^i c^j \ : \ i, j \geq 0\}$,
  - $L_2 = \{a^i b^j c^j \ : \ i, j \geq 0\}$,
  - $L_1 \cap L_2 = \{a^i b^i c^i \ : \ i \geq 0\}$ ist nicht kontextfrei.
  - Beweis mit Pumping Lemma.
- Aber:

Satz

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann ist $L \cap R$ kontextfrei.

Beweisidee: Nutze beide Automaten synchron (Produktkonstruktion)

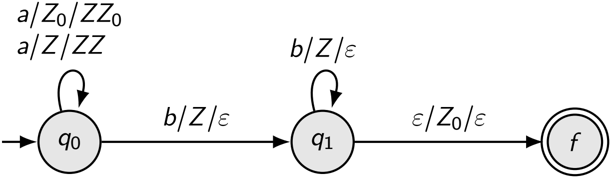
Beweis

- Sei $L = L(\mathcal{A})$ für einen PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$ (also mit akzeptierenden Zuständen).
- Sei $R = L(\mathcal{A}')$ für einen DEA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, q_0', \delta', F')$.
- Produktkonstruktion für $L \cap R$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} &:= (Q \times Q', \Sigma, \Gamma, (q_0, q_0'), Z_0, \Delta', F \times F') \text{ mit} \\
\Delta' &:= \{((p, p'), a, Z, \gamma, (q, q')) \,:\, (p, a, Z, \gamma, q) \in \Delta,\ \delta(p', a) = q'\} \cup \\
&\quad\ \{((p, p'), \varepsilon, Z, \gamma, (q, p')) \,:\, (p, \varepsilon, Z, \gamma, q) \in \Delta, p' \in Q'\}
\end{aligned}
$$

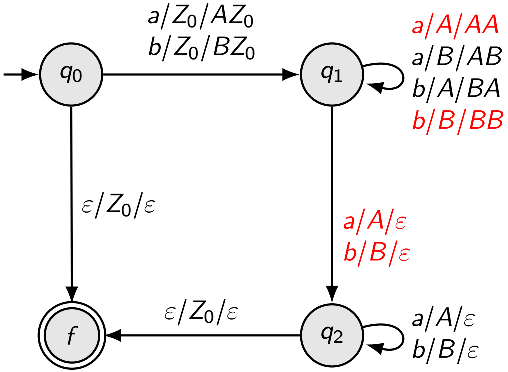
- Induktion über k: $((p, p'), uv, \gamma) \vdash_{\mathcal{B}}^{k} ((q, q'), v, \beta) \Leftrightarrow$ $(p, uv, \gamma) \vdash_{\mathcal{A}}^{k} (q, v, \beta)$ und $p' \xrightarrow{u}_{\mathcal{A}'} q'$.
- Für zwei PDAs funktioniert eine solche Produktkonstruktion nicht, da die beiden PDAs den Keller im Allgemeinen nicht synchron nutzen.

Deterministische Kellerautomaten



- Intuitiv: dieser Kellerautomat ist *fast* deterministisch
- Pro Zustand, Eingabesymbol und oberstem Kellersymbol gibt es *höchstens einen Folgezustand*.
- Für Determinismus sollte es *genau einen Folgezustand* geben.

Deterministische Kellerautomaten



- Automat für $L = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$ ist nichtdeterministisch.
- Der Automat *rät* die Wortmitte.

Deterministische Kellerautomaten

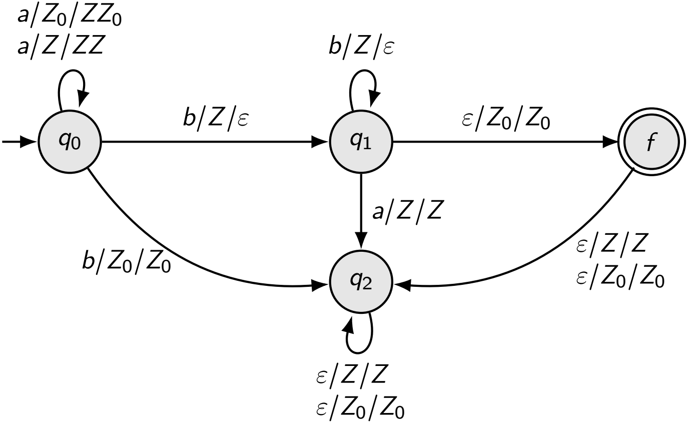
Definition deterministischer Kellerautomat

Ein *deterministischer Kellerautomat (dPDA)* ist ein PDA
$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F),$$
der folgende Eigenschaften erfüllt:

- Für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $Z \in \Gamma$ gibt es genau einen Übergang der Form (q, a, Z, γ, q') oder $(q, \varepsilon, Z, \gamma, q')$.
- Wenn ein Übergang das Kellerstartsymbol Z_0 entfernt, so muss er es direkt wieder zurückschreiben; alle Übergänge, in denen Z_0 vorkommt, müssen also die Form $(q, a, Z_0, \gamma Z_0, q')$ haben, mit $\gamma \in \Gamma^*$ beliebig.

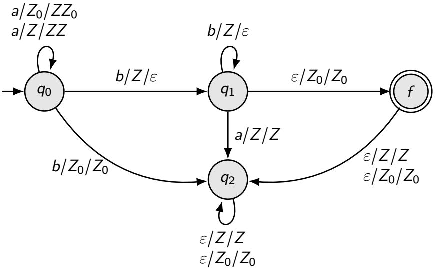
- Zu jeder Konfiguration gibt es *genau eine Folgekonfiguration*.

Beispiel



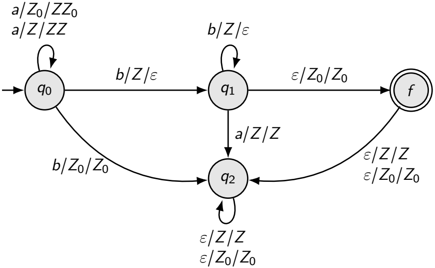
- Der Übergang von q_1 nach f entfernt nicht mehr Z_0 vom Keller und
- der „Papierkorbzustand“ q_2 ist hinzugekommen.

Bemerkungen



- Auf manchen Eingaben gibt es mehr als eine Berechnung.
- Beispiel: Eingabe *ab*.
  - $(q_0, ab, Z_0) \vdash (q_0, b, ZZ_0) \vdash (q_1, \varepsilon, Z_0)$
  - $(q_0, ab, Z_0) \vdash (q_0, b, ZZ_0) \vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (f, \varepsilon, Z_0)$
  - $(q_0, ab, Z_0) \vdash (q_0, b, ZZ_0) \vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (f, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_0)$

Bemerkungen



- Trotz des Determinismus können manche Eingaben nicht vollständig gelesen werden.
- Beispiel: Eingabe *ba*
  - $(q_0, ba, Z_0) \vdash (q_2, a, Z_0)$

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Definition

- Eine formale Sprache L heißt *deterministisch kontextfrei*, wenn es einen dPDA $\mathcal{A}$ gibt mit $L(\mathcal{A}) = L$.
- Die Menge aller deterministisch kontextfreien Sprachen ist $\mathcal{L}_2^d$.

- Deterministisch kontextfreie Sprachen sind u. a. im Compilerbau wichtig, da für sie das *Wortproblem in Linearzeit* gelöst werden kann.
- $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2^d \subsetneq \mathcal{L}_2$.
  - $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2^d$: Jeder DEA $\mathcal{A}$ kann als dPDA ohne ε-Übergänge und mit nur einem Kellersymbol Z_0 betrachtet werden, der seinen Keller nie modifiziert.
  - Die Inklusion ist echt, da $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \in \mathcal{L}_2^d$, aber $L \notin \mathcal{L}_3$.
  - $\mathcal{L}_2^d \subseteq \mathcal{L}_2$: Jeder dPDA ist auch ein PDA.

Abschluss unter Komplement

Satz (ohne Beweis)

$\mathcal{L}_2^d$ ist unter Komplement abgeschlossen.

Korollar

$\mathcal{L}_2^d \subsetneq \mathcal{L}_2$.

Klasse	$\cap$	$\cup$	$\bar{\ }$	$\cdot$	$*$
$\mathcal{L}_0$	✓	✓	✗	✓	✓
$\mathcal{L}_1$	✓	✓	✓	✓	✓
$\mathcal{L}_2$	✗	✓	✗	✓	✓
$\mathcal{L}_2^d$	✗	✗	✓	✗	✗
$\mathcal{L}_3$	✓	✓	✓	✓	✓

Beispiele

- $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \forall v \in \{a,b\}^* : w \neq vv\}$ ist kontextfrei aber nicht deterministisch kontextfrei.
- $\{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei.
- $\{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Nachbemerkungen

- Für dPDAs stellt sich *Akzeptanz per leerem Keller* als sehr schwach heraus.

Lemma (ohne Beweis)

Es gibt keinen dPDA mit Akzeptanz per leerem Keller, der die endliche (also reguläre) Sprache $L = \{a, aa\}$ erkennt.

- Lösung:
  - Führe neues Symbol für Wortende ein, das auch in Übergängen von dPDAs verwendet werden darf.
  - Dann sind beide Akzeptanzbegriffe wieder äquivalent.