Theoretische Informatik 1

WiSe 23/24

Prof. Dr. Sebastian Siebertz
AG Theoretische Informatik
MZH, Raum 3160
siebertz@uni-bremen.de

Universität Bremen

Der Satz von Rabin und Scott

Satz von Rabin und Scott

Zu jedem NEA kann ein äquivalenter DEA konstruiert werden.

Beweis:

- Sei $\mathcal{A}(Q, \Sigma, q_s, \Delta, F)$ ein NEA.
- Definiere $\mathcal{A}' = (2^Q, \Sigma, \{q_s\}, \delta, F')$ mit:
  - $\delta(P, a) = \bigcup_{p \in P} \{q \mid (p, a, q) \in \Delta\}$ für alle $P \in 2^Q$ und $a \in \Sigma$
  - $F' = \{P \in 2^Q \mid P \cap F \neq \varnothing\}$

Beispiel: Tafel

Der Satz von Rabin und Scott

- Hilfsaussage: $q \in \hat{\delta}(\{q_s\}, w) \quad \Leftrightarrow \quad q_s \overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q$.
- Beweis per Induktion über $|w|$:
  - Induktionsanfang: $|w| = 0$

    $$q \in \hat{\delta}(\{q_s\}, \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad q \in \{q_s\} \quad \Leftrightarrow \quad q_s = q \quad \Leftrightarrow \quad q_s \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q \checkmark$$

  - Induktionsannahme: Die Hilfsaussage gilt für alle $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq n$.

Der Satz von Rabin und Scott

- Hilfsaussage: $q \in \hat{\delta}(\{q_s\}, w) \quad \Leftrightarrow \quad q_s \overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q.$
  - Induktionsschritt: $|w| = n + 1$

    Sei $w = ua$ mit $u \in \Sigma^*$, $|u| = n$ und $a \in \Sigma$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\hat{\delta}(\{q_s\}, ua) &= \delta(\hat{\delta}(\{q_s\}, u), a) && \text{(Def. } \hat{\delta}\text{)} \\
&= \bigcup_{p \in \hat{\delta}(\{q_s\}, u)} \{q \mid (p, a, q) \in \Delta\} && \text{(Def. } \delta\text{)} \\
&= \bigcup_{q_s \overset{u}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} p} \{q \mid (p, a, q) \in \Delta\} && \text{(IV)} \\
&= \{q \mid q_s \overset{ua}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q\} && \text{(Def. Lauf)}
\end{aligned}
$$

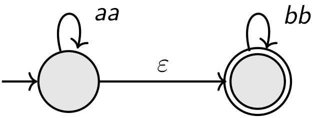
Beweis des Satzes von Rabin und Scott

Wir zeigen nun $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$:

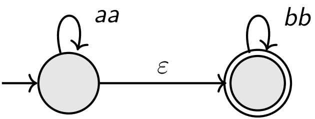
$$\begin{aligned}
w \in L(\mathcal{A}) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists q \in F : q_s \xRightarrow{w}_{\mathcal{A}} q && \text{(Def. } L(\mathcal{A})\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists q \in F : q \in \hat{\delta}(\{q_s\}, w) && \text{(Hilfsaussage)} \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(\{q_s\}, w) \cap F \neq \emptyset && \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(\{q_s\}, w) \in F' && \text{(Def. } F'\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad w \in L(\mathcal{A}').
\end{aligned}$$

Endliche Automaten mit Wortübergängen

- Ein NEA mit Wortübergängen hat die Form $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_s, \Delta, F)$, wobei Q, Σ, q_s, F wie beim NEA definiert sind und $\Delta \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ eine endliche Menge von Wortübergängen ist.
- Ein ε-NEA ist ein NEA mit Wortübergängen der Form (q, ε, q') und (q, a, q') mit $a \in \Sigma$.



Beispiel



- Läufe, Laufbeschriftungen und erkannte Sprache werden entsprechend wie für NEAs definiert.
- Zum Beispiel hat der Lauf

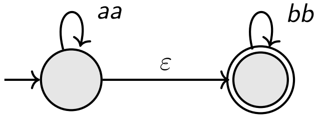
$$q_0 \xrightarrow{aa}_{\mathcal{A}} q_1 \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathcal{A}} q_2 \xrightarrow{bb}_{\mathcal{A}} q_3$$

  des Automaten die Beschriftung $aa \cdot \varepsilon \cdot bb = aabb$.

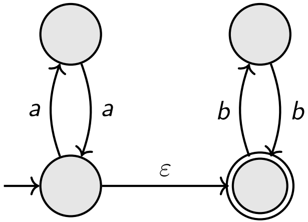
Äquivalenz der Modelle

Satz

Zu jedem NEA mit Wortübergängen kann ein äquivalenter ε-NEA konstruiert werden.



wird überführt in einen äquivalenten ε-NEA:



Äquivalenz der Modelle

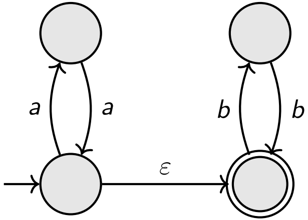
Satz

Zu jedem ε-NEA kann ein äquivalenter NEA konstruiert werden.

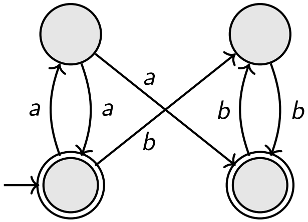
Beweis:

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_s, \Delta, F)$ ein ε-NEA.
- Definiere $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, q_s, \Delta', F')$, wobei
  - $\Delta' := \left\{ (p, a, q) \in Q \times \Sigma \times Q \mid p \stackrel{a}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q \right\}$
  - $F' := \begin{cases} F \cup \{q_s\} & \text{falls} \quad q_s \stackrel{\varepsilon}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q_f \text{ für ein } q_f \in F \\ F & \text{sonst} \end{cases}$
- $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$ siehe Skript.

Beispiel



wird in folgenden NEA überführt:



Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Sind L_1 und L_2 regulär, so sind auch die folgenden Sprachen regulär.

- $L_1 \cup L_2$ (Vereinigung)
- $\overline{L_1}$ (Komplement)
- $L_1 \cap L_2$ (Schnitt)
- $L_1 \cdot L_2$ (Konkatenation)
- L_1^* (Kleene-Stern)

Beweis.

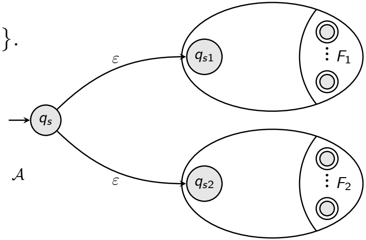
- Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, q_{si}, \Delta_i, F_i)$ zwei NEAs für L_i $(i = 1, 2)$.
- O. B. d. A. gelte $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$.
- Ziel: Konstruiere NEAs für $L_1 \cup L_2$, $\overline{L_1}$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cdot L_2$, L_1^*.

Abschluss unter Vereinigung

Wir zeigen: Sind L_1 und L_2 regulär, so ist auch $L_1 \cup L_2$ regulär:

- Der folgende ε-NEA erkennt $L_1 \cup L_2$:

  $\mathcal{A} := (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_s\}, \Sigma, q_s, \Delta, F_1 \cup F_2)$, wobei
  - $q_s \notin Q_1 \cup Q_2$ und
  - $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(q_s, \varepsilon, q_{s1}), (q_s, \varepsilon, q_{s2})\}$.



- ε-NEA $\rightsquigarrow$ NEA ✓

Abschluss unter Komplement

Wir zeigen: ist L_1 regulär, so ist auch $\overline{L_1}$ regulär:

- Einen DEA für $\overline{L_1}$ erhalten wir wie folgt:
- Potenzmengenkonstruktion:
  $\mathcal{A}_1 \to$ äquivalenter DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_s, \delta, F)$.
- DEA für $\overline{L_1}$:
  $$\overline{\mathcal{A}} := (Q, \Sigma, q_s, \delta, Q \setminus F).$$
- Es gilt:
  $$\begin{aligned} w \in \overline{L_1} \quad &\Leftrightarrow \quad w \notin L(\mathcal{A}_1) \\ &\Leftrightarrow \quad w \notin L(\mathcal{A}) \\ &\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_s, w) \notin F \\ &\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_s, w) \in Q \setminus F \\ &\Leftrightarrow \quad w \in L(\overline{\mathcal{A}}). \end{aligned}$$

Abschluss unter Schnitt

Wir zeigen: sind L_1 und L_2 regulär, so ist auch $L_1 \cap L_2$ regulär:

- Der folgende NEA erkennt $L_1 \cap L_2$ (Produktautomat):

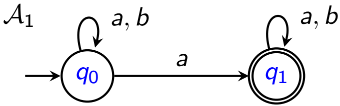
  $$\mathcal{A} := (Q_1 \times Q_2, \Sigma, (q_{s1}, q_{s2}), \Delta, F_1 \times F_2)$$

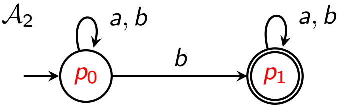
  mit

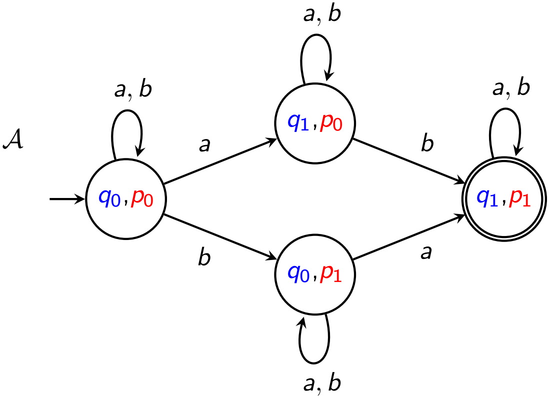
  $$\Delta = \{((q_1, q_2), a, (q_1', q_2')) \mid (q_1, a, q_1') \in \Delta_1 \text{ und } (q_2, a, q_2') \in \Delta_2\}.$$

- Ein Übergang in $\mathcal{A}$ ist also genau dann möglich, wenn der entsprechende Übergang in $\mathcal{A}_1$ *und* $\mathcal{A}_2$ möglich ist.

Abschluss unter Schnitt







Abschluss unter Schnitt

- Beweis, dass $L(\mathcal{A}) = L_1 \cap L_2$.
  - Sei $w = a_1 \cdots a_n$. Dann ist $w \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow$ es gibt einen Lauf

    $$(q_{1,0}, q_{2,0}) \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} (q_{1,1}, q_{2,1}) \cdots (q_{1,n-1}, q_{2,n-1}) \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}} (q_{1,n}, q_{2,n})$$

    mit $(q_{1,0}, q_{2,0}) = (q_{s1}, q_{s2})$ und $(q_{1,n}, q_{2,n}) \in F_1 \times F_2$.
  - Nach Konstruktion von $\mathcal{A}$ ist das der Fall $\Leftrightarrow$ für jedes $i \in \{1, 2\}$

    $$q_{i,0} \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}_i} q_{i,1} \cdots q_{i,n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}_i} q_{i,n}$$

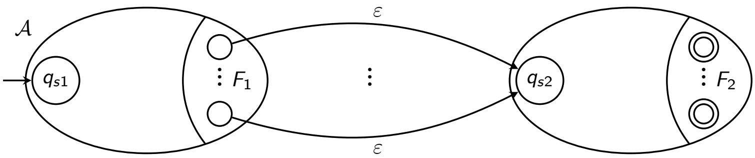
    ein Lauf ist mit $q_{i,0} = q_{0i}$ und $q_{i,n} \in F_i$.
  - Solche Läufe existieren $\Leftrightarrow w \in L_1 \cap L_2$.

Abschluss unter Konkatenation

Wir zeigen: sind L_1 und L_2 regulär, so ist auch $L_1 \cdot L_2$ regulär:

- Der folgende ε-NEA erkennt $L_1 \cdot L_2$:

$$\mathcal{A} := (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, q_{s1}, \Delta, F_2), \quad \text{wobei}$$
$$\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(q_f, \varepsilon, q_{s2}) \mid q_f \in F_1\}$$

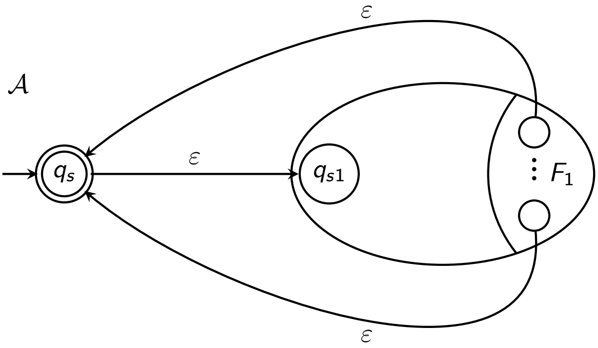


Abschluss unter Kleene Stern

Wir zeigen: ist L_1 regulär, so ist auch L_1^* regulär:

- Der folgende ε-NEA erkennt L_1^*:

$$\mathcal{A} := (Q_1 \cup \{q_s\}, \Sigma, q_s, \Delta, \{q_s\}), \quad \text{wobei } q_s \notin Q_1 \text{ und}$$
$$\Delta := \Delta_1 \cup \{(q_f, \varepsilon, q_s) \mid q_f \in F_1\} \cup \{(q_s, \varepsilon, q_{s1})\}$$



Größe der konstruierten Automaten

- Die Automaten für $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cdot L_2$ und L_1^* sind *polynomiell* in der Größe der Automaten für L_1, L_2.
  - Z.B. für $L_1 \cup L_2$: $|Q| = |Q_1| + |Q_2| + 1$ (linear).
  - Z.B. für $L_1 \cap L_2$: $|Q| = |Q_1| \cdot |Q_2|$ (quadratisch).
- Beim Komplement kann die Konstruktion *exponentiell* sein, wenn wir mit einem NEA starten.
  - Potenzmengenkonstruktion: $|Q| = 2^{|Q_1|}$.