Theoretische Informatik 1

WiSe 23/24

Prof. Dr. Sebastian Siebertz
AG Theoretische Informatik
MZH, Raum 3160
siebertz@uni-bremen.de

Universität Bremen

Minimale DEAs

- Ziel: zu gegebenem DEA einen äquivalenten DEA mit minimaler Zustandszahl konstruieren.
- Zwei Schritte:
  - Eliminieren von Zuständen die nicht erreichbar sind.
  - Zusammenfassen äquivalenter Zustände.

Minimale DEAs

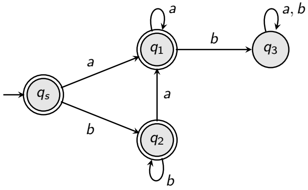
- Ein Zustand p eines DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_s, \delta, F)$ heißt erreichbar, falls es ein Wort $w \in \Sigma^*$ gibt mit $\hat{\delta}(q_s, w) = p$.
- Für die erkannte Sprache sind nur Zustände wichtig, die von q_s erreichbar sind.
- Durch Weglassen aller anderen Zustände erhalten wir einen äquivalenten Automaten: $\mathcal{A}_0 = (Q_0, \Sigma, Q_0, \delta_0, F_0)$ mit
  - $Q_0 = \{q \in Q \mid q \text{ ist erreichbar}\}$
  - $\delta_0 : Q_0 \times \Sigma \to Q_0 : (q, a) \mapsto \delta(q, a)$ (δ_0 wie δ, aber eingeschränkt auf Q_0)
  - $F_0 = F \cap Q_0$

Äquivalenz von Zuständen

- Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_s, \delta, F)$ ein DEA.
- Für $q \in Q$ sei $\mathcal{A}_q = (Q, \Sigma, q, \delta, F)$ der Automat mit Startzustand q
- Zwei Zustände $q, q' \in Q$ heißen $\mathcal{A}$-äquivalent $(q \sim_{\mathcal{A}} q')$ wenn

$$L(\mathcal{A}_q) = L(\mathcal{A}_{q'}).$$

- Beispiel:



- $q_s \sim_{\mathcal{A}} q_2$, da $L(\mathcal{A}_{q_s}) = b^* a^* = L(\mathcal{A}_{q_2})$.
- $q_s \not\sim_{\mathcal{A}} q_1$, da $b \in L(\mathcal{A}_{q_s}) \setminus L(\mathcal{A}_{q_1})$.

Äquivalenz von Zuständen

- Lemma
  1) $\sim_{\mathcal{A}}$ ist eine Äquivalenzrelation auf Q.
  2) $\sim_{\mathcal{A}}$ ist verträglich mit der Übergangsfunktion, d. h.

$$q \sim_{\mathcal{A}} q' \Rightarrow \forall a \in \Sigma : \delta(q, a) \sim_{\mathcal{A}} \delta(q', a)$$

Beweis.

1) ist klar, da die Relation „=“ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Äquivalenz von Zuständen

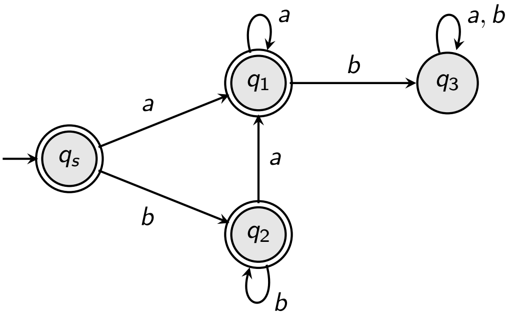
2) $(q \sim_{\mathcal{A}} q' \Rightarrow \forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \sim_{\mathcal{A}} \delta(q',a))$:

$$\begin{aligned}
q \sim_{\mathcal{A}} q' &\Leftrightarrow L(\mathcal{A}_q) = L(\mathcal{A}_{q'}) \\
&\Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q',w) \in F \\
&\Rightarrow \forall a \in \Sigma \ \forall v \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,av) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q',av) \in F \\
&\Leftrightarrow \forall a \in \Sigma \ \forall v \in \Sigma^* : \hat{\delta}(\delta(q,a),v) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(\delta(q',a),v) \in F \\
&\Leftrightarrow \forall a \in \Sigma : L(\mathcal{A}_{\delta(q,a)}) = L(\mathcal{A}_{\delta(q',a)}) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \sim_{\mathcal{A}} \delta(q',a).
\end{aligned}$$

Berechnung der Äquivalenzrelation

- Die Relation $\sim_{\mathcal{A}}$ kann wie folgt berechnet werden.
- Definiere eine Folge von Relationen $\sim_0, \sim_1, \sim_2, \ldots$
  - $q \sim_0 q' \quad \Leftrightarrow \quad (q \in F \Leftrightarrow q' \in F)$
  - $q \sim_{k+1} q' \quad \Leftrightarrow \quad q \sim_k q'$ und $\forall a \in \Sigma : \delta(q, a) \sim_k \delta(q', a)$
- Es gilt $Q \times Q \supseteq \sim_0 \supseteq \sim_1 \supseteq \sim_2 \supseteq \ldots$.
- Da Q endlich ist, gibt es ein $k \geq 0$ mit $\sim_k = \sim_{k+1}$.
- Wir zeigen, dass $\sim_k$ die gewünschte Relation $\sim_{\mathcal{A}}$ ist.

Beispiel



- $Q \times Q = \{(q_s, q_s), (q_s, q_1), \ldots, (q_3, q_3)\}$.
- $\sim_0 = \{(q_s, q_s), (q_s, q_1), (q_1, q_s), (q_s, q_2), (q_2, q_s), (q_1, q_1), (q_1, q_2), (q_2, q_1), (q_2, q_2)\} \cup \{(q_3, q_3)\}$.
- $\sim_1 = \{(q_s, q_s), (q_s, q_2), (q_2, q_s), (q_2, q_2)\} \cup \{(q_1, q_1)\} \cup \{(q_3, q_3)\}$.
- $\sim_2 = \sim_1 = \sim_{\mathcal{A}}$.

Berechnung der Äquivalenzrelation

Hilfsaussage

Für alle $k \geq 0$ gilt: $q \sim_k q'$ genau dann, wenn für alle $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq k$:

$$w \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{q'}).$$

Beweis per Induktion über $|w|$.

- Induktionsanfang: Nach Def. von $\sim_0$ gilt $q \sim_0 q'$ genau dann, wenn $(q \in F \Leftrightarrow q' \in F) \Leftrightarrow (\varepsilon \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow \varepsilon \in L(\mathcal{A}_{q'}))$.
- Induktionsschritt:

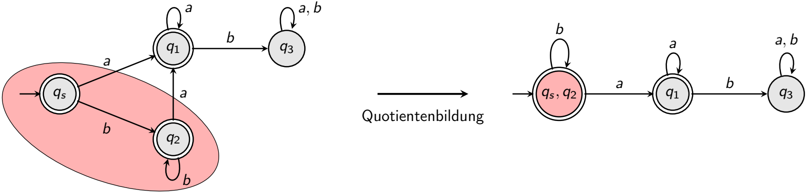
$$\begin{aligned} q \sim_{k+1} q' &\Leftrightarrow q \sim_k q' \text{ und } \forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \sim_k \delta(q',a) \\ &\Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* \text{ mit } |w| \leq k : w \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{q'}) \text{ und} \\ &\qquad \forall a \in \Sigma : \forall w \in \Sigma^* \text{ mit } |w| \leq k : w \in L(\mathcal{A}_{\delta(q,a)}) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{\delta(q',a)}) \\ &\Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* \text{ mit } |w| \leq k+1 : w \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{q'}). \end{aligned}$$

Berechnung der Äquivalenzrelation

- Wir zeigen: wenn $\sim_k = \sim_{k+1}$, dann $\sim_k = \sim_{\mathcal{A}}$.
- $\sim_{\mathcal{A}} \subseteq \sim_k$:
  - $q \sim_{\mathcal{A}} q' \Leftrightarrow$ für alle $w \in \Sigma^*$: $w \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{q'})$.
  - $q \sim_k q' \Leftrightarrow$ für alle $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq k$: $w \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{q'})$.
  - Also $q \sim_{\mathcal{A}} q' \Rightarrow q \sim_k q'$, d.h. $\sim_{\mathcal{A}} \subseteq \sim_k$.
- $\sim_k \subseteq \sim_{\mathcal{A}}$:
  - Angenommen $\sim_k \nsubseteq \sim_{\mathcal{A}}$.
  - Wähle q, q' mit $q \sim_k q'$ und $q \not\sim_{\mathcal{A}} q'$.
  - Es gibt also ein $w \in \Sigma^*$ mit $w \in L(\mathcal{A}_q)$ und $w \notin L(\mathcal{A}_{q'})$.
  - Mit Hilfsaussage folgt $q \not\sim_n q'$ für $n = |w|$.
  - Da $\sim_k \subseteq \sim_i$ für alle $i \geq 0$ folgt $q \not\sim_k q'$, ein Widerspruch.

Der Quotientenautomat

- Der Quotientenautomat $\widetilde{\mathcal{A}} = (\widetilde{Q}, \Sigma, [q_s]_{\mathcal{A}}, \widetilde{\delta}, \widetilde{F})$ zu $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_s, \delta, F)$ ist definiert durch:
  - $\widetilde{Q} := \{[q]_{\mathcal{A}} \mid q \in Q\}$
  - $\widetilde{\delta}([q]_{\mathcal{A}}, a) := [\delta(q, a)]_{\mathcal{A}}$ (repräsentantenunabhängig!)
  - $\widetilde{F} := \{[q]_{\mathcal{A}} \mid q \in F\}$



Der Quotientenautomat

Satz

$\widetilde{\mathcal{A}}$ ist äquivalent zu $\mathcal{A}$.

Beweis.

- Es folgt leicht per Induktion über $|w|$:

$$\hat{\tilde{\delta}}([q_s]_{\mathcal{A}}, w) = [\hat{\delta}(q_s, w)]_{\mathcal{A}} \text{ für alle } w \in \Sigma^*. \qquad (*)$$

- Nun gilt:

$$\begin{aligned} w \in L(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \hat{\delta}(q_s, w) \in F \\ &\Leftrightarrow [\hat{\delta}(q_s, w)]_{\mathcal{A}} \in \widetilde{F} \quad (\text{Def. } \widetilde{F}) \\ &\Leftrightarrow \hat{\tilde{\delta}}([q_0]_{\mathcal{A}}, w) \in \widetilde{F} \quad (*) \\ &\Leftrightarrow w \in L(\widetilde{\mathcal{A}}). \end{aligned}$$

Der Quotientenautomat

- Für einen DEA $\mathcal{A}$ bezeichnet $\mathcal{A}_{\text{red}}$ den reduzierten Automaten, den wir aus $\mathcal{A}$ durch Eliminieren unerreichbarer Zustände und nachfolgendes Bilden des Quotientenautomaten erhalten.
- $\mathcal{A}_{\text{red}}$ kann nicht weiter vereinfacht werden.
- Wir werden zeigen, dass $\mathcal{A}_{\text{red}}$ der kleinste DEA ist, der $L(\mathcal{A})$ akzeptiert.
- Um dies zu zeigen werden wir die Nerode-Rechtskongruenz verwenden, die auch von unabhängigem Interesse ist.
    - Charakterisierung der regulären Sprachen ohne Automaten.

Die Nerode-Rechtskongruenz

Definition Nerode-Rechtskongruenz

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Für $u, v \in \Sigma^*$ definieren wir:

$$u \simeq_L v \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \Leftrightarrow vw \in L.$$

Beispiel: $L = b^* a^*$

- $$\begin{aligned} \varepsilon \simeq_L b : \quad \forall w : \varepsilon w \in L \quad & \Leftrightarrow \quad w \in L \\ & \Leftrightarrow \quad w \in b^* a^* \\ & \Leftrightarrow \quad bw \in b^* a^* \\ & \Leftrightarrow \quad bw \in L \end{aligned}$$
- $\varepsilon \not\simeq_L a : \quad \varepsilon b \in L$, aber $ab \notin L$
- Beachte: aus $u \simeq_L v$ folgt, dass $u \in L \Leftrightarrow v \in L$.

Eigenschaften der Nerode-Rechtskongruenz

Lemma: Eigenschaften der Nerode-Rechtskongruenz

1) $\simeq_L$ ist eine Äquivalenzrelation.
2) $\simeq_L$ ist eine Rechtskongruenz, d.h. zusätzlich zu 1) gilt:

$$u \simeq_L v \Rightarrow \forall w \in \Sigma^* : uw \simeq_L vw.$$

3) L ist disjunkte Vereinigung von $\simeq_L$-Klassen:

$$L = \dot{\bigcup}_{u \in L} [u]_L$$

   wobei $[u]_L := \{v \mid u \simeq_L v\}$.

4) Ist $L = L(\mathcal{A})$ für einen DEA $\mathcal{A}$, so ist die Anzahl der Zustände von $\mathcal{A}$ größer oder gleich dem Index (Zahl der Äquivalenzklassen) von $\simeq_L$.

Eigenschaften der Nerode-Rechtskongruenz

1) folgt aus der Definition von $\simeq_L$, da die Relation „$\Leftrightarrow$" reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

2) Damit $uw \simeq_L vw$ gilt, muss für alle $w' \in \Sigma^*$ gelten:

$$uww' \in L \Leftrightarrow vww' \in L. \tag{$*$}$$

Wegen $ww' \in \Sigma^*$ folgt $(*)$ aus $u \simeq_L v$.

Eigenschaften der Nerode-Rechtskongruenz

3) Dafür zeigen wir, dass für alle $v \in \Sigma^*$ gilt:

$$v \in L \qquad \text{gdw.} \qquad v \in \dot{\bigcup}_{u \in L} [u]_L.$$

„⇒“: Wenn $v \in L$, dann ist $[v]_L$ in der Vereinigung rechts; zudem gilt $v \in [v]_L$.

„⇐“: Sei $v \in [u]_L$ für ein $u \in L$.
Wegen $\varepsilon \in \Sigma^*$ folgt aus $u = u \cdot \varepsilon \in L$ und $v \simeq_L u$ auch $v = v \cdot \varepsilon \in L$.

Eigenschaften der Nerode-Rechtskongruenz

4) Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_s, \delta, F)$ ein DEA mit $L = L(\mathcal{A})$.

Wir zeigen: $\hat{\delta}(q_s, u) = \hat{\delta}(q_s, v)$ impliziert $u \simeq_L v$:

$$\begin{aligned}
\forall w : uw \in L \quad &\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_s, uw) \in F \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_s, u), w) \in F \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_s, v), w) \in F \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_s, vw) \in F \\
&\Leftrightarrow \quad vw \in L.
\end{aligned}$$

Also folgt aus $u \not\simeq_L v$, dass $\hat{\delta}(q_s, u) \neq \hat{\delta}(q_s, v)$. Damit gibt es mindestens so viele Zustände wie $\simeq_L$-Klassen (Schubfachprinzip).

Beispiel (Fortsetzung)

- $L = b^* a^*$.
- $\simeq_L$ hat drei Klassen:
  - $[\varepsilon]_L = b^*$
  - $[a]_L = b^* aa^*$
  - $[ab]_L = (a+b)^* ab(a+b)^*$
- Es ist $L = [\varepsilon]_L \cup [a]_L$ (vgl. Lemma, Punkt 3)
- und $\Sigma^* \setminus L = [ab]_L$.

Der kanonische Automat

- Wenn L nur endlich viele Äquivalenzklassen hat, können wir diese als Zustände eines kanonischen Automaten für L verwenden.

Definition Kanonischer DEA

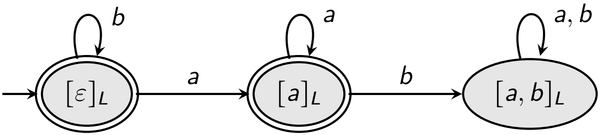
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache, so dass $\simeq_L$ endlichen Index hat.
Der *kanonische DEA* $\mathcal{A}_L = (Q, \Sigma, q_s, \delta, F)$ zu L ist definiert durch:

- $Q := \{[u]_L \mid u \in \Sigma^*\}$
- $q_s := [\varepsilon]_L$
- $\delta([u]_L, a) := [ua]_L$ (repräsentantenunabhängig!)
- $F := \{[u]_L \mid u \in L\}$.

- $\mathcal{A}_L$ hat nach nach Punkt 4 des Lemmas eine minimale Anzahl von Zuständen: es gibt keinen DEA, der $L(\mathcal{A}_L)$ akzeptiert und weniger Zustände hat.

Beispiel (Fortgesetzt)

- $L = b^* a^*$.
- $\simeq_L$ hat drei Klassen:
  - $[\varepsilon]_L = b^*$
  - $[a]_L = b^* aa^*$
  - $[ab]_L = (a + b)^* ab(a + b)^*$
- Der kanonische Automat:



Der kanonische Automat

Satz

Hat $\simeq_L$ endlichen Index, so ist $\mathcal{A}_L$ ein DEA mit $L = L(\mathcal{A}_L)$.

Beweis.

- Es gilt:

$$
\begin{aligned}
L(\mathcal{A}_L) &= \{u \mid \hat{\delta}(q_s, u) \in F\} && \\
&= \{u \mid \hat{\delta}([\varepsilon]_L, u) \in F\} && (\text{Def. } q_s) \\
&= \{u \mid [u]_L \in F\} && (\text{wegen } \hat{\delta}([\varepsilon]_L, u) = [u]_L) \\
&= \{u \mid u \in L\} && (\text{Def. } F) \\
&= L.
\end{aligned}
$$

Charakterisierung von regulären Sprachen

Satz von Myhill und Nerode

Eine Sprache L ist regulär genau dann, wenn $\simeq_L$ endlichen Index hat.

$\Rightarrow$

- Wenn L regulär, dann gibt es DEA $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L$.
- Zustandszahl ist endlich und mit unserem Lemma, Punkt 4) größer oder gleich dem Index von $\simeq_L$, also ist auch der endlich.

$\Leftarrow$

- Ergibt sich unmittelbar aus obigem Satz, da $\mathcal{A}_L$ DEA ist, der L akzeptiert.

Anwendung

Beispiel:

- Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht regulär:
- Für $n \neq m$ gilt: $a^n \not\simeq_L a^m$, denn

$$a^n b^n \in L, \text{ aber } a^m b^n \notin L.$$

- Also hat $\simeq_L$ unendlichen Index.
- Also ist L nach Satz von Myhill und Nerode nicht regulär.

Der reduzierte Automat ist minimal

Satz (Minimalität des reduzierten DEA)

Sei $\mathcal{A}$ ein DEA. Dann hat jeder DEA, der $L(\mathcal{A})$ erkennt, mindestens so viele Zustände wie der reduzierte DEA $\mathcal{A}_{\text{red}}$.

Beweis.

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_s, \delta, F)$ und $\mathcal{A}_{\text{red}} = (\widetilde{Q}, \Sigma, [q_s]_{\mathcal{A}}, \widetilde{\delta}, \widetilde{F})$.
- Wir zeigen $|\widetilde{Q}| \leq |\simeq_L|$.
- Dann ist $\mathcal{A}_{\mathrm{red}}$ nach unserem Lemma, Punkt 4) minimal.
- Dafür: definiere injektive Abbildung π, die jedem Zustand aus $\widetilde{Q}$ eine Äquivalenzklasse von $\simeq_L$ zuordnet.

Der reduzierte Automat ist minimal

- Sei $[q]_{\mathcal{A}} \in \widetilde{Q}$.
- q ist in $\mathcal{A}$ von q_s aus erreichbar mit einem Wort w_q (Def. von $\mathcal{A}_{\text{red}}$).
- Setze $\pi([q]_{\mathcal{A}}) = [w_q]_L$.
- π ist injektiv:
  - Seien $[q]_{\mathcal{A}}, [p]_{\mathcal{A}} \in \widetilde{Q}$ mit $[q]_{\mathcal{A}} \neq [p]_{\mathcal{A}}$.
  - Dann gilt $q \not\sim_{\mathcal{A}} p$ und es gibt $w \in \Sigma^*$ so dass *nicht*
  $$\hat{\delta}(q, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(p, w) \in F.$$
  - Nach Wahl von w_p und w_q gilt dann aber auch *nicht*
  $$\hat{\delta}(q_s, w_q w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_s, w_p w) \in F,$$
  - also auch *nicht*
  $$w_q w \in L \Leftrightarrow w_p w \in L.$$
  - Es folgt $w_q \not\sim_L w_p$, also $\pi([q]_{\mathcal{A}}) \neq \pi([p]_{\mathcal{A}})$, wie gewünscht.

Der reduzierte Automat

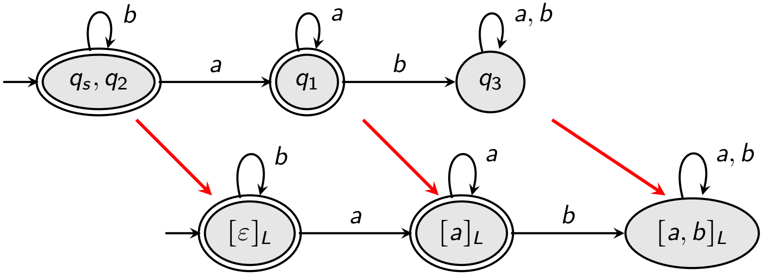
- Es ist also sowohl der reduzierte Automat als auch der kanonische Automat von minimaler Größe.
- Wir zeigen, dass sie sogar *identisch bis auf Zustandsumbenennung* sind.

Definition: Isomorphie von DEAs

Zwei DEAs $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_s, \delta, F)$ und $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, q_s', \delta', F')$ sind *isomorph* (geschrieben $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}'$) g.d.w. es eine Bijektion $\pi : Q \to Q'$ gibt mit:

- $\pi(q_s) = q_s'$,
- $\pi(F) = \{\pi(q) \mid q \in F\} = F'$ und
- $\pi(\delta(q, a)) = \delta'(\pi(q), a)$ für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$.

Isomorphie



Lemma

$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}' \;\Rightarrow\; L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$

Beweis siehe Skript.

Isomorphie kanonischer DEA und reduzierter DEA

Satz (Isomorphie kanonischer DEA und reduzierter DEA)

Es sei L eine reguläre Sprache und $\mathcal{A}$ ein DEA mit $L(\mathcal{A}) = L$. Dann gilt: der reduzierte Automat $\mathcal{A}_{\text{red}}$ ist isomorph zum kanonischen Automaten $\mathcal{A}_L$.

Beweisidee:

- Sei $\mathcal{A}_{\mathrm{red}} = (\widetilde{Q}, \Sigma, [q_s]_{\mathcal{A}}, \widetilde{\delta}, \widetilde{F})$ und $\mathcal{A}_L = (Q', \Sigma, q_s', \delta', F')$.
- Da in $\mathcal{A}_{\mathrm{red}}$ alle Zustände erreichbar sind existiert wieder für jedes $[q]_{\mathcal{A}} \in Q'$ ein $w_q \in \Sigma^*$ mit
$$\hat{\delta}'([q_s]_{\mathcal{A}}, w_q) = [q]_{\mathcal{A}}.$$
- Definiere $\pi([q]_{\mathcal{A}}) := [w_q]_L$.
- Zeige, dass dies ein Isomorphismus ist (siehe Skript).

Folgerungen

- Der reduzierte Automat $\mathcal{A}_{\text{red}}$ ist unabhängig vom urspr. DEA $\mathcal{A}$:
  - wenn $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B}) = L$, dann $\mathcal{A}_{\text{red}} \simeq \mathcal{B}_{\text{red}}$,
  - denn aus $\mathcal{A}_{\text{red}} \simeq \mathcal{A}_L \simeq \mathcal{B}_{\text{red}}$ folgt $\mathcal{A}_{\text{red}} \simeq \mathcal{B}_{\text{red}}$.
- Für jede reguläre Sprache L gibt es einen eindeutigen minimalen DEA:
  - wenn $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B}) = L$ und $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ minimale Zustandszahl unter allen DEAs haben, die L akzeptieren, dann $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$,
  - denn dann enthalten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ weder unerreichbare noch äquivalente Zustände und der jeweilige reduzierte Automat ist identisch zum ursprünglichen Automaten.
  - Damit gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{red}} \simeq \mathcal{A}_L \simeq \mathcal{B}_{\text{red}} = \mathcal{B}$, also auch $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Folgerungen

Korollar

Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ DEAs. Dann gilt: $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}') \Leftrightarrow \mathcal{A}_{\text{red}} \simeq \mathcal{A}'_{\text{red}}$.

- Im Prinzip liefert das Korollar eine Methode, um für zwei Automaten zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren:
  - konstruiere die reduzierten Automaten und
  - teste, ob sie isomorph sind.
- Da wir allerdings keinen Polynomialzeitalgorithmus für das Isomorphieproblem kennen, ist diese Methode nicht optimal.