

Mathe 2: Wiederholung

18.07.2023

10:15



P1

max
min

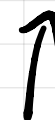
Supremum
Infimum

$\{1, 2, 3\}$ max: 3
min: 1

$\{0, 0,9, 0,99, 0,999, \dots\}$ max: undef.
min: 0

Obergrenzen

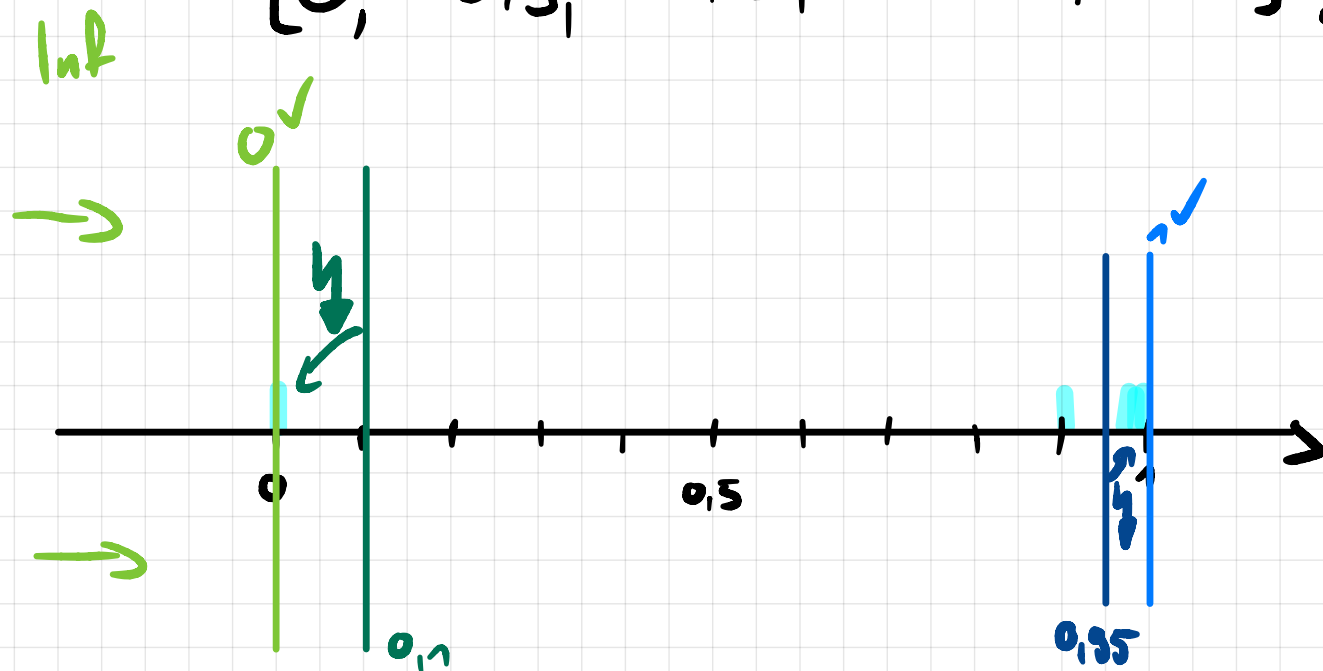
1, 1,50,
10', ...



kleinste
Obergrenze:

Supremum

Supremum



Obermenge ist wichtig

$$P13h) \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x^2 < 2\}$$

min
max
sup
inf



$$x^2 < 2$$



$$x < \sqrt{2}$$

$$\uparrow$$

$$\in \mathbb{Q}$$

$$\uparrow$$

$$\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Inf/Sup wären hier

P2

$$\begin{array}{r}
 753 : 3 = 251 \\
 \underline{6} \downarrow : 3 = 2 \uparrow \uparrow \\
 15 \downarrow : 3 = 5 \uparrow \\
 \underline{15} \downarrow : 3 = 5 \uparrow \\
 03 \\
 3 : 3 = 1
 \end{array}$$

(251)

P2 1a)

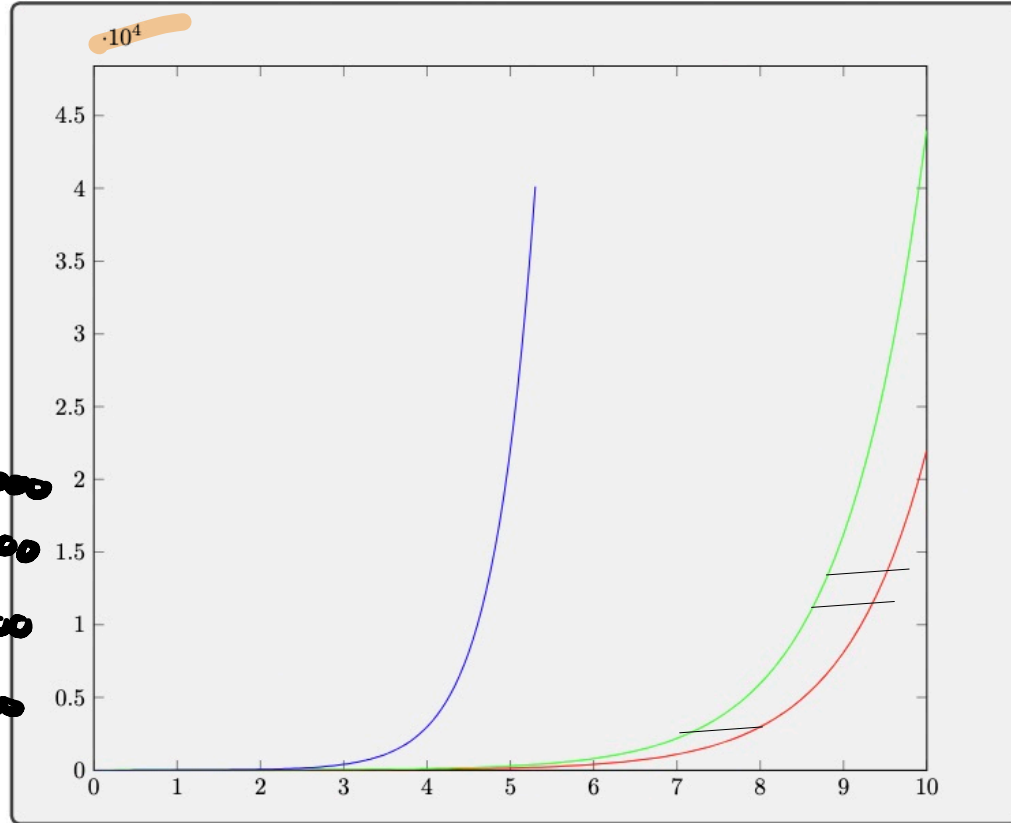
$$\begin{array}{r}
 (3x^3 - 3x^2 - 12x + 12) : (x - 2) = 3x^2 + 3x - 6 \\
 \underline{-(3x^3 - 6x^2)} \quad \downarrow = (x - 2) \cdot 3x^2 \uparrow \\
 0 + 3x^2 - 12x \\
 \underline{-(3x^2 - 6x)} \quad \downarrow = (x - 2) \cdot 3x \uparrow \\
 0 - 6x + 12 \\
 \underline{-(-6x + 12)} \quad \downarrow = (x - 2) \cdot (-6) \uparrow \\
 0 + 0
 \end{array}$$

P2

a) $f(x) = \exp(x)$

b) $g(x) = 2 \exp(x)$

c) $h(x) = \exp(2x)$



• erreicht gleichen Wert wie
ca nach $\frac{3}{4}$ des Striches

Strich leider nicht
ganz gerade

Warum?

$$\begin{aligned} g(x) &= 2 e^x \\ &= e^{\ln(2)} \cdot e^x \\ &= e^{x + \ln(2)} \\ &= f(x + \ln(2)) \end{aligned}$$

P3 1 Periode p

kleinste Zahl mit

$$f(x) = f(x+p) \quad \forall x$$

$$\cos(x) = \cos(-x), \quad \cos(x) = -\cos(x - \pi)$$

$$\cos(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

sin

$$\sin(x + \text{offset})$$

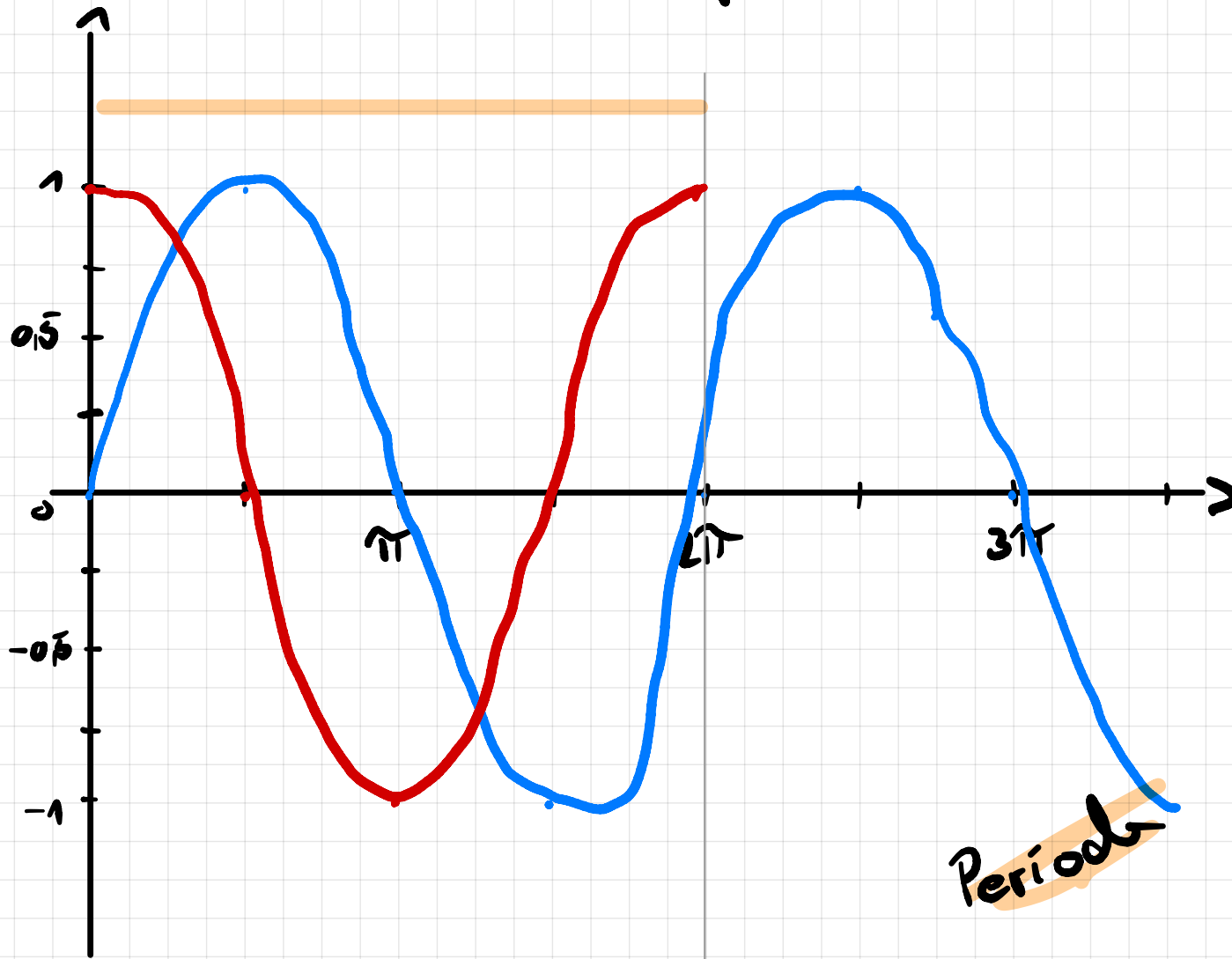
↑
↑
konstant
verändert
Periode nicht

$$\sin(x \cdot d)$$

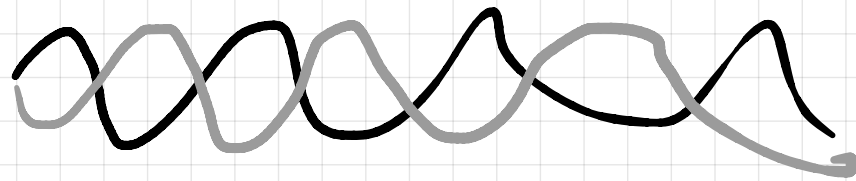
↑
konstant

Auf Strecke von
 2π d-Mal abgefahren
 $\Rightarrow$

Auf $\frac{2\pi}{d}$ Strecke 1-Mal
abgefahren



Summe periodischer Funktionen:



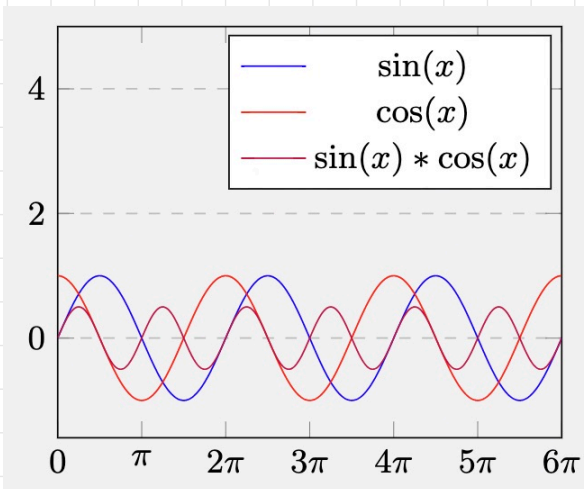
$\Rightarrow \text{Summe} = 0$



$\Rightarrow \text{Summe} \neq 0$

Periode ist kgV der einzelnen Perioden

Produkt — || —



Beweis π ist Periode

$$\cos(x) = -\cos(x+\pi)$$

$$\sin(x) = -\sin(x+\pi)$$

$$\sin(x+\pi) \cdot \cos(x+\pi)$$

$$= (-1) \sin(x) \cdot (-1) \cdot \cos(x)$$

$$= (-1)^2 \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$b^y = x$$

$$\log_b(x) = y$$

$\ln = \log_e$ Mathematiker
 $\lg = \log_2$ Informatiker
 $\lg = \log_{10}$

$$b^0 = 1$$

$$\log_b(1) = 0$$

$$b^1 = b$$

$$\log_b(b) = 1$$

$$b^{x+y} = b^x \cdot b^y$$

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

⋮

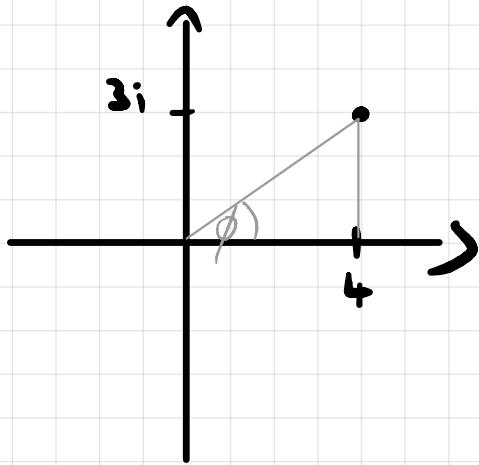
$$\ln(x^n) = \ln(\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}})$$

$$\ln(x^2) = 2 \cdot \ln(x)$$

$$\underbrace{\log(x) + \dots + \log(x)}_{n\text{-mal}} = n \cdot \log x$$

$$\ln(\exp(2x)) = \ln(e^{2x}) = 2x \ln(e) = 2x$$

P4 Komplexe Zahlen gut für +, -



$$4 + 3i$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) =$$

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$r \cdot e^{i\phi}$$

← gut für Mult, Potenz,

$$\sqrt[n]{r \cdot e^{i\phi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\phi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}}$$



$$k \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$\sin(\phi_1 \overset{+}{\underset{-}{}} \phi_2) = \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \overset{+}{\underset{-}{}} \cos(\phi_1) \sin(\phi_2)$$

$$\cos(\phi_1 \overset{+}{\underset{-}{}} \phi_2) = \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \overset{+}{\underset{-}{}} \sin(\phi_1) \sin(\phi_2)$$

P5

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

↑
Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

Nur wenn beides konv.
Prod.

P5 3

$$\frac{1}{3n^2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad b_n = n$$

$$a=0 \quad b=\infty \quad a \cdot b=0$$

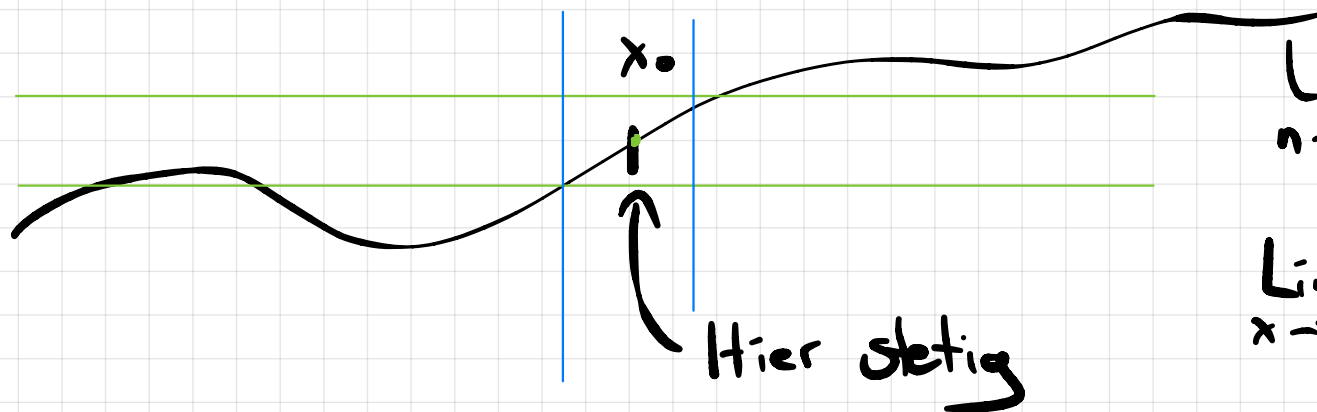
$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = n$$

$$a=0 \quad b=\infty \quad a \cdot b=1$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = n^2$$

$$a=0 \quad b=\infty \quad a \cdot b=\infty$$

P6

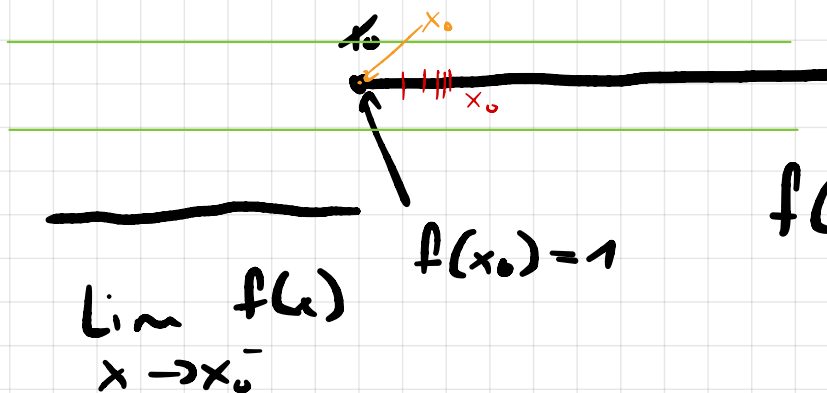


$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

H2

$$|x_0 - x| < \delta$$

$$|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad | \sqrt{5} - \sqrt{x} | < \varepsilon$$

$$x_0 = 5$$

$$|(\sqrt{5} - \sqrt{x}) \cdot 1|$$

$$|(\sqrt{5} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{x}}{\sqrt{5} + \sqrt{x}}|$$

3. Binom

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|3+6| = 9 = |3| + |6|$$

$$|-3+6| = 3 < |3| + |6|$$

$$= \left| \frac{5-x}{\sqrt{5} + \sqrt{x}} \right|$$

$$= \frac{|5-x|}{|\sqrt{5} + \sqrt{x}|}$$

$$\underbrace{|\sqrt{5} + \sqrt{x}|}_c \geq \underbrace{|\sqrt{5}| + |\sqrt{x}|}_d \geq \underbrace{|\sqrt{5}|}_e$$

$$c \geq e$$

$$\frac{1}{c} \leq \frac{1}{e}$$

$$< \frac{\delta}{|\sqrt{5} + \sqrt{x}|} \leq \frac{\delta}{\sqrt{5}} < \varepsilon$$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}$$

$P 7 \quad a_m = \sum_{n=0}^m b_n \leftarrow \text{Folge}$
 $\uparrow$
 Partialsummenfolge
 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \leftarrow \text{Reihe}$

- Cauchy-Kriterium (Lemma 7.6):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : \left(\sum_{k=n}^m a_k < \varepsilon \right)$$

- Leibniz Kriterium (Lemma 7.10):

Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist die Reihe $\sum (-1)^k (a_k)$ konvergent.

- Majorantenkriterium (Satz 7.12):

Gilt $0 \leq |a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq n_0$ und ist $\sum b_k$ eine konvergente Reihe, so konvergiert die Reihe a_k absolut.

- Minorantenkriterium (Satz 7.13):

Gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k < n_0$ und ist die Reihe $\sum a_k$ divergent, so divergiert auch die Reihe $\sum b_k$.

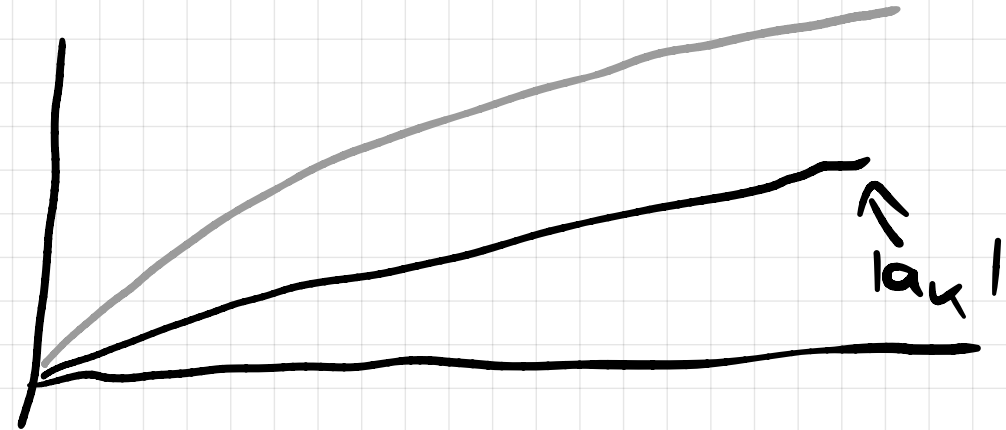
- Quotientenkriterium (Satz 7.17):

Gegeben sei die Reihe $\sum a_n$. Gilt für alle $n > n_0 : a_n \neq 0$ und gibt es ein festes $0 < q < 1$, sodass $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$, so konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut.

- Wurzelkriterium (Satz 7.19):

Gegeben sei die Reihe $\sum a_n$. Gibt es ein festes $q < 1$, sodass für alle $n > n_0$ gilt: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, so konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut.

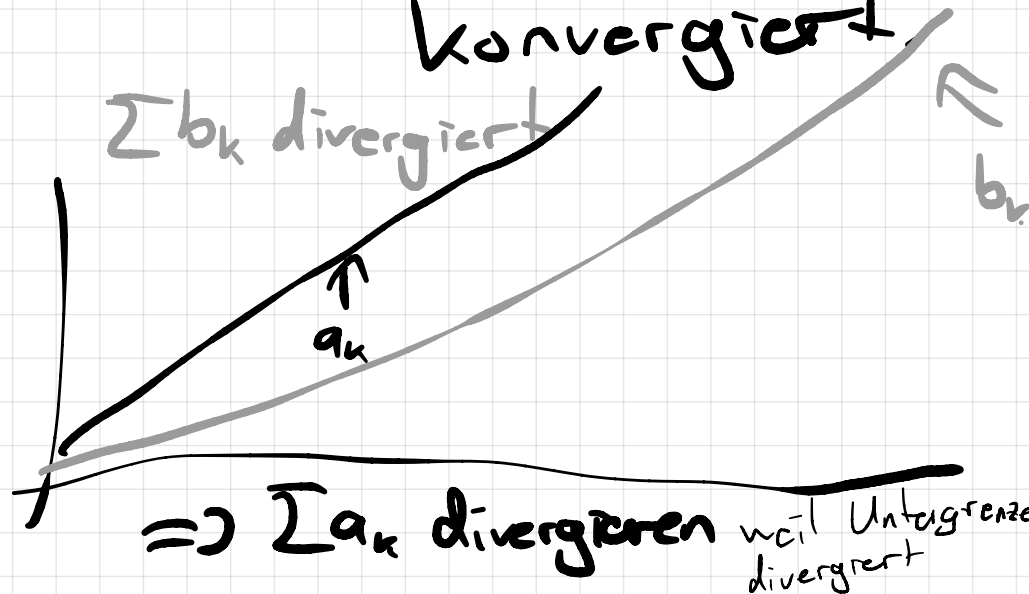
Major $\sum b_k$ konv. b_k



$\Rightarrow \sum a_k$ konverg.

Da Obergrenze konvergiert

$\sum b_k$ divergiert



$\Rightarrow \sum a_k$ divergieren weil Untergrenze divergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n$$

Wenn $b \geq 1$ divergiert

Wenn $b < 1$ konvergiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q < 1$$

$$b_i \xrightarrow{\cdot b} b_{i+1} \xrightarrow{\cdot b} b_{i+2}$$

$$q < 1$$

$$a_i \xrightarrow{\cdot q} a_{i+1} \xrightarrow{\cdot q} a_{i+2}$$

$$a_{i+1} \leq q \cdot a_i$$

$$a_{i+2} \leq q^2 \cdot a_i$$

$$a_i \leq q^i \cdot a_0$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \sum_{i=0}^{\infty} q^i a_0 \geq \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

konv. da $q < 1$

Konv. nach
Majoranten
kriterium

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Konstant
Entwicklungspunkt

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} |x-x_0|$$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} |x-x_0|$$

$$\lim \left| \frac{a_{n+1} (x-x_0)^{n+1}}{a_n (x-x_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}_{< q} |x-x_0| < q' < 1$$

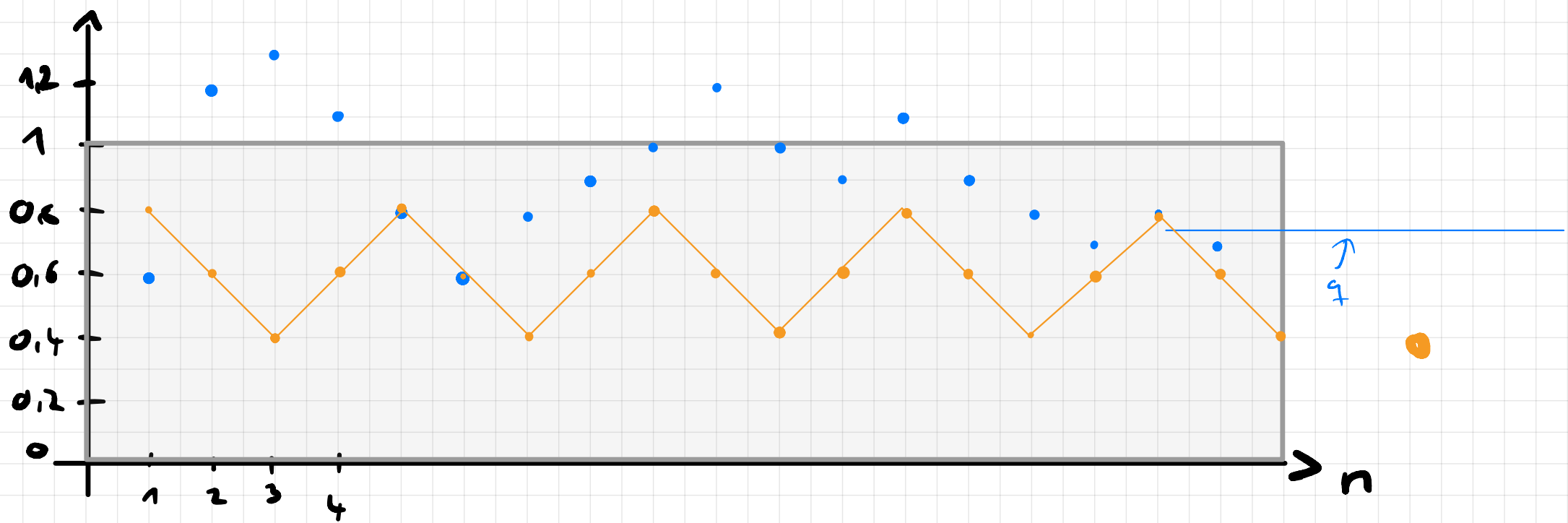
$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x-x_0| < q \cdot |x-x_0| < q' < 1$$

$$3 \cdot |x-x_0|$$

$$\uparrow$$

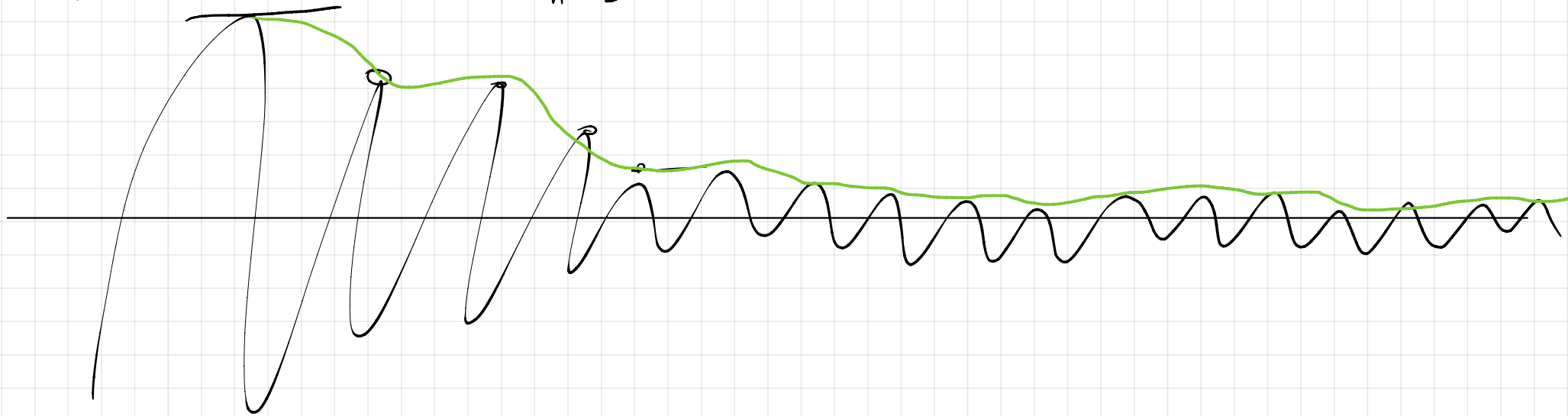
$$\frac{1}{3}$$

$$3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$



$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} X_k$$

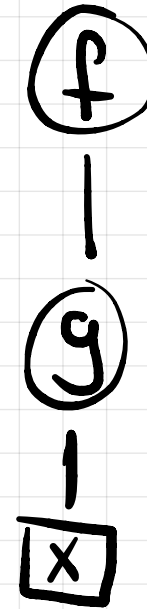
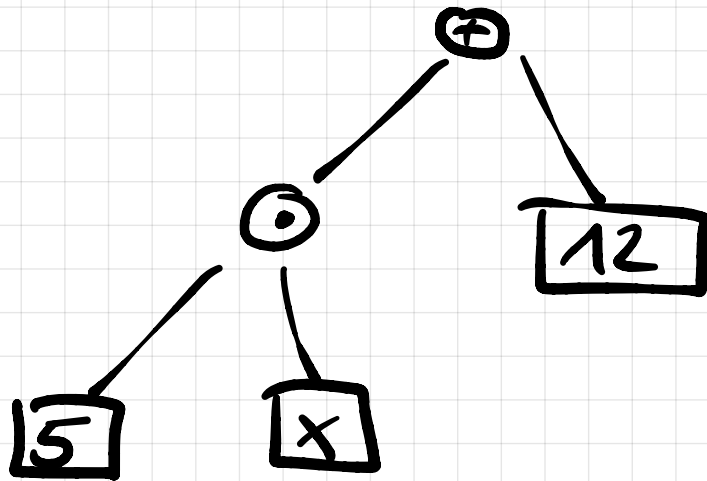


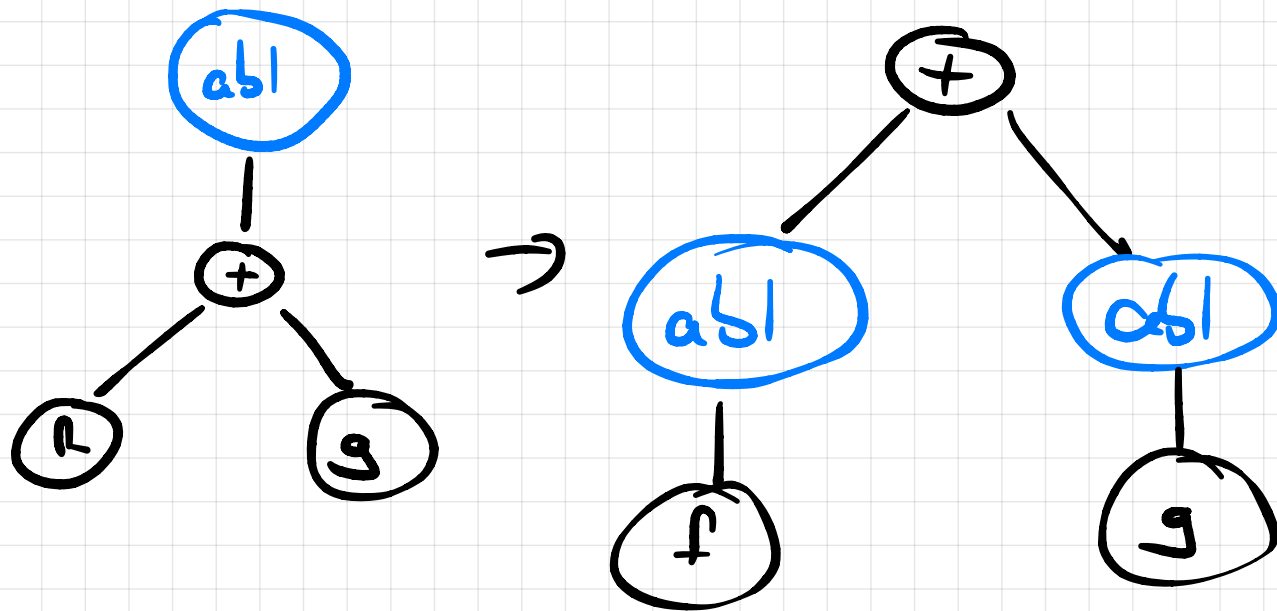
H3 gibts nichts zu zu sagen

pg

$$5x + 12$$

$$f(g(x))$$





$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

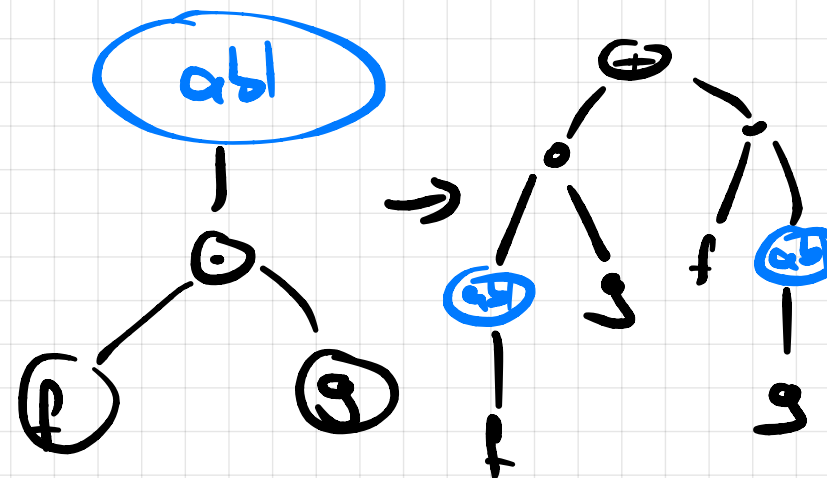
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$c'(x) = 0$$

constante

$$(x^n)'$$

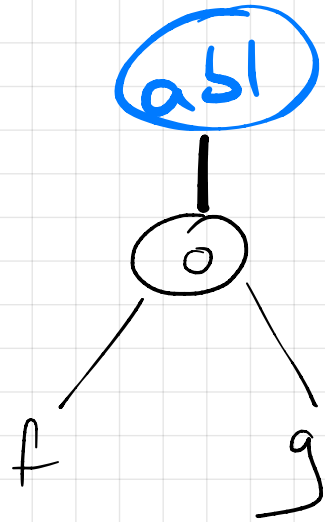
$$= n x^{n-1}$$



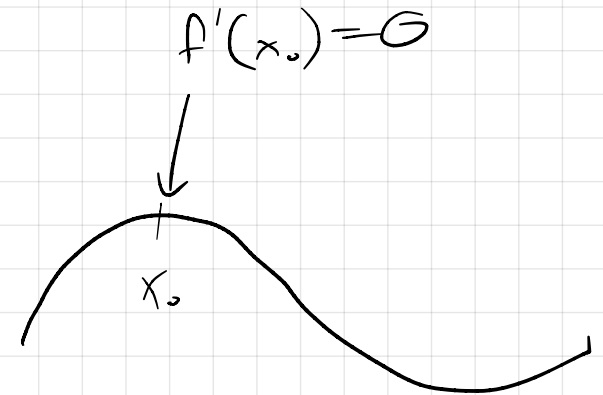
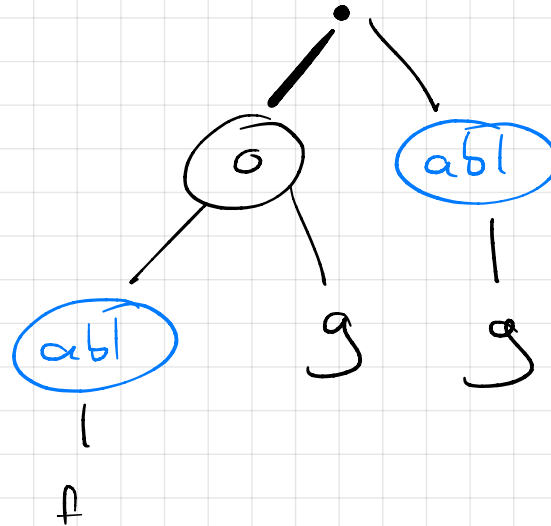
$$f(g(x))$$

$\rightarrow$

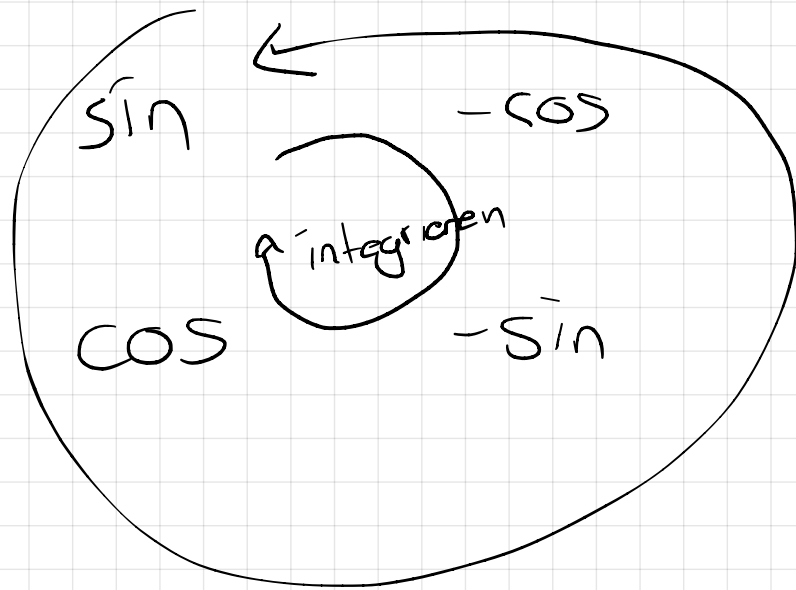
$$f'(g(x)) \cdot g'(x)$$



$\rightarrow$



$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$



ableiten

Newton

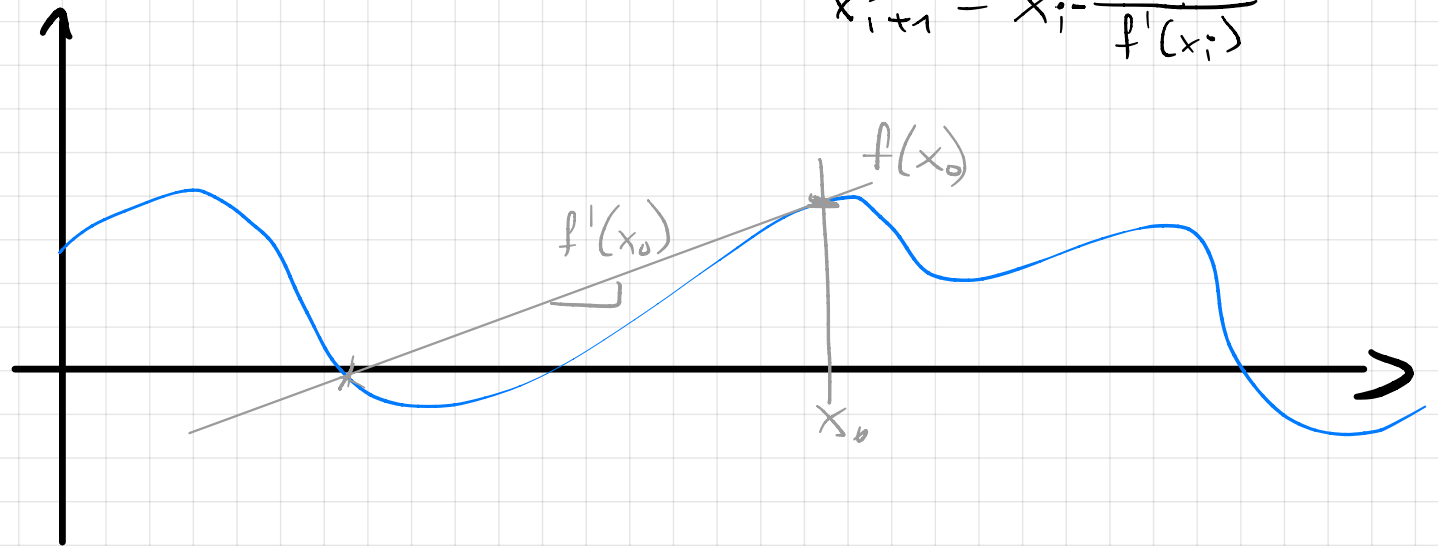
Gegeben / Geraten

x_0

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Taylorpolynom Taylorreihe

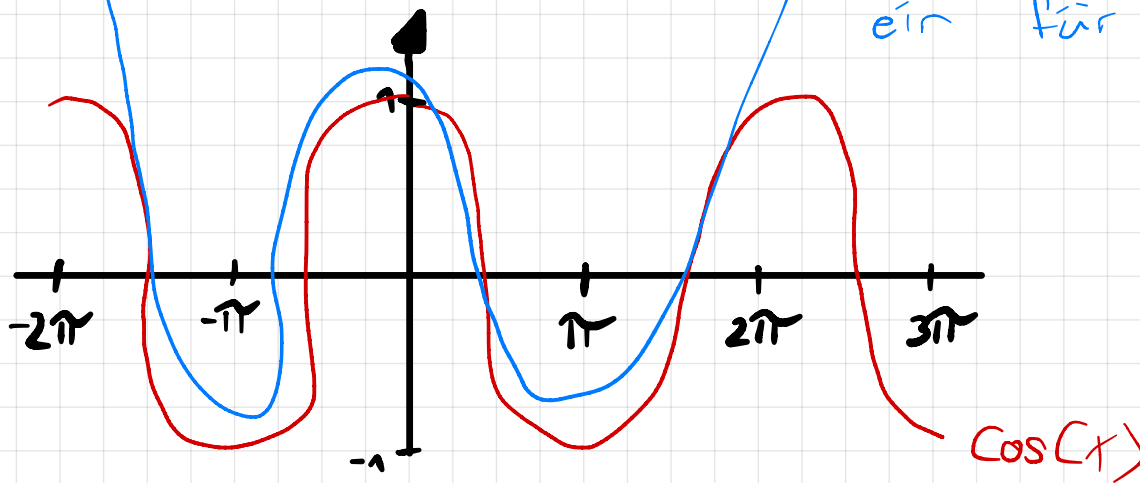
$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

float[] polynom = new float[] {

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$

};

← Taylorpolynom
ein für cos



Punkt, wo Approximation exakt ist
(Entwicklungspunkt)

$$T_n(x, x_0, f) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Eingabe des Polynoms Funktion die Approximiert wird

McLaurin $\sin(x^2 - 2)$
(Taylor mit $x_0 = 0$)

Kommt separat

$$\begin{aligned}
 & \int \underbrace{x^2}_g \underbrace{\sin(2x)}_{f'} dx \\
 &= x^2 \frac{-\cos(2x)}{2} \\
 & - + \int \underbrace{-\frac{1}{2} \cos(2x)}_{f'} \cdot \underbrace{x^2}_{g'} dx \\
 &= x^2 \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot x \\
 & - \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot 1 dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 \left(\frac{1}{2} \cos(2x) \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot x \\
 &+ \frac{1}{4} \cos(2x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} ((1-2x^2) \cos(2x) \\
 &+ 2x \sin(2x))
 \end{aligned}$$

Produktregel

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x)$$

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Integration durch Substitution

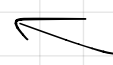
$$\int_a^b f'(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

$$\int \sin(2x) dx = \int 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) dx$$

$u = 2x$

$$\left[\begin{array}{c} f(x) \\ f(b) - f(a) \end{array} \right]_a^b = \int \frac{1}{2} \sin(u) du = -\frac{1}{2} \cos(u) = -\frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$x \cdot y \frac{\partial}{\partial x} = y$$


 Hier ist y eine Konstante

$\text{grad}(f) \leftarrow$ Vektor aller ersten Ableitungen

Hesse Matrix $\leftarrow$ Matrix aller zweiten Ableitungen

Zeile: Nach welcher Var als zweites abgeleitet
 Spalte: Nach welcher Var zuerst abgeleitet

$\sin(x \cdot y)$ alle 2. Ableitungen

$$\sin(x \cdot y) \frac{\partial}{\partial x} = \cos(x \cdot y) \cdot y$$

$$\sin(x \cdot y) \frac{\partial}{\partial y} = \cos(x \cdot y) \cdot x$$


 grad

$$\cos(x \cdot y) \cdot y \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\sin(x \cdot y) \cdot y^2 & -\sin(x \cdot y) \cdot xy + \cos(x \cdot y) \\ -\sin(x \cdot y) \cdot xy + \cos(x \cdot y) & -\sin(x \cdot y) \cdot x^2 \end{pmatrix}$$

$$\cos(x \cdot y) \cdot y \frac{\partial}{\partial y} =$$

$$\cos(x \cdot y) \cdot x \frac{\partial}{\partial y}$$

Hesse Matrix