Prof. Dr. Rolf Drechsler, drechsler@informatik.uni-bremen.de, MZH 4330
Christina Plump, cplump@uni-bremen.de, MZH 4206

9. Übungsblatt zur Vorlesung

Technische Informatik 1

Aufgabe 1 (3 + 3 + 2 Punkte)

In der Vorlesung habt Ihr OBDDs (Ordered Binary Decision Diagrams) und Reduktionsregeln hierfür kennengelernt. Betrachtet die Funktionen $f \in \mathcal{B}_4$, gegeben durch den Booleschen Ausdruck

$$e_f = (x_3 \oplus x_4)(x_1 x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}) + (x_1 \oplus x_2)(x_3 x_4 + \overline{x_3}\,\overline{x_4}) \tag{1}$$

und $g \in \mathcal{B}_4$, gegeben durch den Booleschen Ausdruck

$$e_g = (x_1 \oplus x_4)(x_3 x_2 + \overline{x_2}\,\overline{x_3}) + (x_2 \oplus x_3)(x_1 x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_4}) \tag{2}$$

a) Konstruiert Schritt für Schritt ein OBDD G zur Funktion f mit der natürlichen Variablenordnung $\pi_1 : x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Gebt dabei alle Kofaktoren an.

b) Konstruiert nun auch das OBDD H_g mit der Variablenordnung π_1 und gebt alle Kofaktoren an.

c) Reduziert sowohl G_f als auch H_g vollständig, d.h. bildet jeweils das ROBDD. Stellen die ROBDDs die gleiche Funktion dar?

Aufgabe 2 (2 + 1 + 1 Punkte)

Die Boolesche Funktion SAT ist wie folgt definiert:

$$SAT(f) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{B}^n \text{ so dass } f(\alpha) = 1 \text{ für } f \in \mathcal{B}_{n,1}, SAT : \mathcal{B}_{n,1} \rightarrow \mathbb{B}$$

a) Beschreibt algorithmisch, wie sich mit Hilfe eines OBDDs G für ein beliebiges f bestimmen lässt, ob SAT für dieses gilt. Bestimmt zusätzlich die dazugehörige Komplexität. Demonstriert Eure Methode an geeigneten Beispielfunktionen $f_{SAT=0}, f_{SAT=1}$.

b) Bestimmt die Komplexität der Berechnung von SAT für ein beliebiges f in kanonischer KNF bzw. kanonischer DNF (das OBDD von f ist *nicht* gegeben). Lässt sich diese verbessern?

c) Welche Komplexitätsklasse liegt vor, wenn man für ein gegebenes ROBDD bestimmen möchte, ob SAT für dieses gilt? Begründet Eure Überlegungen.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 1 Punkte)

In der Vorlesung habt Ihr KFDDs (Kronecker Functional Decision Diagrams) und ihre Reduktionsregeln kennen gelernt. Betracht nun die Funktion $h \in \mathcal{B}_4$ gegeben durch den Booleschen Ausdruck $e_h = \overline{x_1} \oplus (x_2 + x_1\overline{x_4}) \oplus \overline{x_3} \oplus (x_4 + x_1\overline{x_2})$.

a) Konstruiert das KFDD zu h mit der Variablenordnung $\pi_2 : x_3 < x_1 < x_4 < x_2$ und der Zerlegungstypliste $d_1 = (S_{@x_3}, S_{@x_1}, S_{@x_4}, S_{@x_2})$ und reduziert es. Gebt Kofaktoren und Reduktionsschritte an.

b) Konstruiert das KFDD zu h mit der Variablenordnung $\pi_2 : x_3 < x_1 < x_4 < x_2$ und der Zerlegungstypliste $d_2 = (pD_{@x_3}, nD_{@x_1}, pD_{@x_4}, nD_{@x_2})$ und reduziert es. Gebt Kofaktoren und Reduktionsschritte an.

c) Betrachtet die KFDDs hinsichtlich ihrer Größe. Was fällt Euch auf? Woran könnte das liegen?

Aufgabe 4 (2 + 1 Punkte)

Zero-suppressed BDDs (ZBDDs) kennzeichnen OBDDs, die allerdings auf eine andere Weise ausgewertet werden. Die Berechnung für eine Belegung $x \in \mathbb{B}^n$ beginnt bei der Wurzel und folgt demselben Berechnungspfad wie in einem OBDD. Es wird dabei jedoch der Funktionswert 1 berechnet, wenn der Pfad an einem 1-Blatt endet *und* alle Variablen, die auf dem Pfad *nicht* betrachtet werden, den Wert 0 besitzen. Bedenke analog zur Wahrheitstafel, dass ausgelassene Knoten bei einem ZBDD dennoch eine Belegung benötigen.

a) Zeigt, dass die bekannte Eliminationsregel aus der Vorlesung zur Reduzierung von OBDDs nicht angewendet werden kann. Welche neue Regel müsste stattdessen eingeführt werden, um weiterhin die Kanonizität zu sichern?

b) Beschreibt einen Anwendungsfall, bei dem ZBDDs einen Vorteil gegenüber OBDDs haben.

Begründet Eure Antworten.

Abgabe: bis Donnerstag, den 22.06.2023, 08:15 Uhr per e-Mail an den Tutor und Christina Plump mit folgendem Betreff: [TI-Abgabe] <Tutorium> - <Gruppe>: Blatt <Blatt>