Kapitel 3
Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Thorsten Dickhaus

Universität Bremen
Institut für Statistik

Mathematik 3: Stochastik
Universität Bremen, Fachbereich 03, SoSe 2025

Übersicht

Übersicht

Überabzählbare Ergebnisräume (I)

Angenommen, der Grundraum Ω eines Zufallsexperiments ist gleich $\mathbb{R}$ oder eine überabzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Dann ist es in aller Regel nicht von Interesse, jeder Teilmenge von Ω einen W'keitswert zuzuweisen, weil es sehr "exotische" Teilmengen A von $\mathbb{R}$ gibt, etwa:

- $A = \{x \in \mathbb{R}$: Die 13. Nachkommastelle von x ist gleich $5.\}$
- $A = \{$periodische Dezimalbrüche mit Periodenlänge $17\}$
- A ist eine Menge, die nur mit Hilfe einer nicht-konstruktiven Auswahlfunktion im Sinne des Auswahlaxioms beschrieben werden kann.

Überabzählbare Ergebnisräume (II)

Solche "exotischen" Teilmengen von $\mathbb{R}$ (insbesondere die des dritten Typs) werden daher im Rahmen der W'keitstheorie ausgespart, und damit folgt, dass $\mathcal{A} \neq 2^{\Omega}$ gewählt wird, wenn Ω überabzählbar ist.

Die für die meisten praktischen Anwendungen relevantesten Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle.

Borel'sche σ-Algebra (I)

Definition: (Die Borel'sche σ-Algebra über $\mathbb{R}$)

Die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ (zu Ehren von Émile Borel, 1871 - 1956) ist die kleinste σ-Algebra über $\mathbb{R}$, die alle halboffenen Intervalle der Form $(a, b]$, alle kompakten Intervalle der Form $[a, b]$ sowie alle offenen Intervalle der Form (a, b) enthält. Die Elemente von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ heißen Borel-Mengen.

Was ist eine σ-Algebra ?

Definition: (σ-Algebra)

Sei $\Omega \neq \emptyset$ ein Grundraum. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ heißt eine σ-Algebra über Ω, falls gilt:

$(A1)$ $\Omega \in \mathcal{A}$

$(A2)$ *$\mathcal{A}$ ist abgeschlossen gegenüber Komplementsbildung:* $\forall A \in \mathcal{A}$: $\complement A = \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$

$(A3)$ *$\mathcal{A}$ ist abgeschlossen gegenüber abzählbarer Vereinigungsbildung: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Borel-Mengen

Weitere Borel-Mengen sind:

- alle Elementarereignisse der Form $\{x\}$ von $\mathbb{R}$,
- alle endlichen und abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$,
- alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Allerdings ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq 2^{\mathbb{R}}$!

Borel'sche σ-Algebra (II)

Definition: (Borel'sche σ-Algebra über $\Omega \subset \mathbb{R}$)

Für $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}$ ist das Mengensystem

$$\mathcal{B}(\Omega) = \{A \cap \Omega : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

eine σ-Algebra über Ω und heißt Borel'sche σ-Algebra über Ω.

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung (I)

Sei Ω eine überabzählbare, nicht notwendigerweise strikte, Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Dann heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} : \mathcal{B}(\Omega) \to [0, 1]$ eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω, falls es eine (stückweise) stetige Funktion $f = f_{\mathbb{P}}$ gibt, so dass für jedes Intervall $I = (a, b] \subseteq \Omega$ gilt:

$$\mathbb{P}(I) = \int_a^b f(x)dx$$

Insbesondere haben hier Elementarereignisse der Form $A = \{a\}$ die W'keit Null, denn

$$\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}((a, a]) = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung (I)

Sei Ω eine überabzählbare, nicht notwendigerweise strikte, Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Dann heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} : \mathcal{B}(\Omega) \to [0, 1]$ eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω, falls es eine (stückweise) stetige Funktion $f = f_{\mathbb{P}}$ gibt, so dass für jedes Intervall $I = (a, b] \subseteq \Omega$ gilt:

$$\mathbb{P}(I) = \int_a^b f(x)dx$$

Insbesondere haben hier Elementarereignisse der Form $A = \{a\}$ die W'keit Null, denn

$$\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}((a, a]) = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung (I)

Sei Ω eine überabzählbare, nicht notwendigerweise strikte, Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Dann heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} : \mathcal{B}(\Omega) \to [0,1]$ eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω, falls es eine (stückweise) stetige Funktion $f = f_{\mathbb{P}}$ gibt, so dass für jedes Intervall $I = (a,b] \subseteq \Omega$ gilt:

$$\mathbb{P}(I) = \int_a^b f(x)dx$$

Insbesondere haben hier Elementarereignisse der Form $A = \{a\}$ die W'keit Null, denn

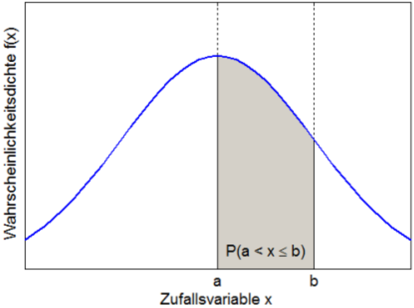
$$\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}((a,a]) = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung (II)

Analog nennen wir eine reellwertige Zufallsvariable X mit überabzählbarem Wertebereich $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ stetig verteilt, falls es eine (stückweise) stetige Funktion $f = f_X$ gibt, so dass für jedes Intervall $(a, b] \subseteq \mathcal{X}$ gilt:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Illustration: Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung



https://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/fileadmin/images/Skript_STS_V_1_Gieb/Kapitel_4_1/Grafik_4_1_24_HQ.png

Übersicht

Dichtefunktion

Die Funktion f nennt man Dichtefunktion, Wahrscheinlichkeitsdichte oder Lebesgue-Dichte (nach Henri Léon Lebesgue) von $\mathbb{P}$ bzw. von X.

Jede Lebesguedichte auf einem Grundraum $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall \omega \in \Omega : f(\omega) \geq 0$

(ii) $\int_\Omega f(x)dx = 1$

Umgekehrt induziert jede (stückweise) stetige Funktion f mit den beiden obigen Eigenschaften ein W'keitsmaß auf Ω (versehen mit seiner Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{B}(\Omega)$).

Verteilungsfunktion einer stetig verteilten Zufallsvariable (I)

Sei X eine stetig verteilte, reellwertige Zufallsvariable mit Lebesguedichte f_X.

Dann gilt für die Verteilungsfunktion F_X von X:

$$\forall x \in \mathcal{X} : F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y) dy$$

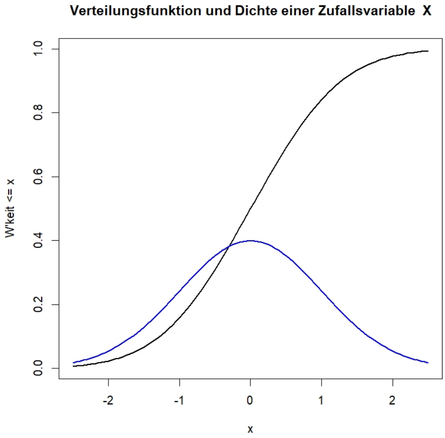
Verteilungsfunktion einer stetig verteilten Zufallsvariable (II)

Umgekehrt liefert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass für eine stetig verteilte, reellwertige Zufallsvariable X gilt:

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d}{dx} F_X(x), & x \notin D, \\ \text{beliebig}, & x \in D, \end{array} \right\}$$

wobei

$$D = \{x \in \mathbb{R} : F_X \text{ ist in } x \text{ nicht stetig differenzierbar}\}.$$



Blau: Lebesguedichte

Schwarz: Verteilungsfunktion

Übersicht

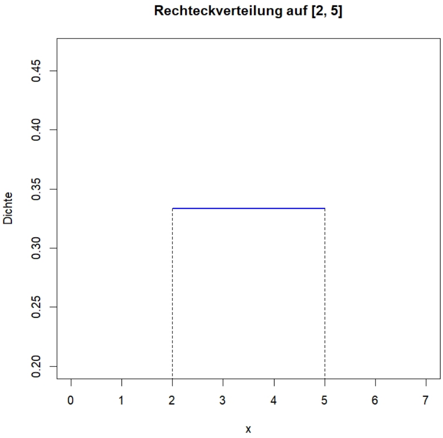
Stetige Gleichverteilung (I)

Eine W'keitsverteilung mit einer konstanten Lebesguedichte heißt eine stetige Gleichverteilung.

Sei $[a,b]$ mit $a < b$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, dann ist die Lebesguedichte der stetigen Gleichverteilung $\mathrm{UNI}[a,b]$ auf $\Omega = [a,b]$ gegeben durch

$$f_{\mathrm{UNI}[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine solche stetige Gleichverteilung heißt auch Rechteckverteilung.



Blau: Lebesguedichte

gestrichelt: Hilfslinien

Stetige Gleichverteilung (II)

Definition:

Eine Teilmenge A des $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$, heißt geometrisch regulär, falls man ihr ein d-dimensionales Volumen (Länge, Fläche, ...) $\lambda\!\!\lambda^d(A)$ zuordnen kann.

Anmerkung:

Alle wohlbekannten geometrischen Objekte wie z. B. Kreis, Dreieck, Kugel, Quader, Pyramide, etc. sind geometrisch reguläre Mengen ($d = 2, 3$).

Stetige Gleichverteilung (III)

Definition:

Sei Ω eine nicht-leere, geometrisch reguläre Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit $\infty > \lambda\!\!\lambda^d(\Omega) > 0$, und sei $\mathcal{A}$ das System aller geometrisch regulären Teilmengen von Ω.

Dann wird durch

$$\mathbb{P}(A) := \frac{\lambda\!\!\lambda^d(A)}{\lambda\!\!\lambda^d(\Omega)} = \frac{\text{Volumen von } A}{\text{Volumen von } \Omega}, \; A \in \mathcal{A},$$

die stetige Gleichverteilung $\mathbb{P}$ auf Ω definiert.

Die Zahl $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ heißt auch die geometrische Wahrscheinlichkeit von A.

Beispiel zur geometrischen Wahrscheinlichkeit (I)

Sei $\Omega = [0,1]^2$ und $\mathbb{P}$ die stetige Gleichverteilung auf Ω.
Berechne $\mathbb{P}(E)$, wobei $E = \{(x,y) \in \Omega : xy > 1/2\}$.

Lösung:

Da $\lambda\!\!\lambda^2(\Omega) = 1 \cdot 1 = 1$ ist, genügt es, $\lambda\!\!\lambda^2(E)$ zu berechnen.

Beachte dazu, dass man äquivalenterweise schreiben kann:

$$E = \left\{ (x,y) \in [0,1]^2 : x > \frac{1}{2}, y > \frac{1}{2x} \right\}$$

Beispiel zur geometrischen Wahrscheinlichkeit (II)

Also ist der Flächeninhalt von E gleich 1/2 minus der Fläche unter der Kurve $x \mapsto \frac{1}{2x}$ für $x \in (1/2, 1]$, und demnach

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \frac{1}{2} - \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2x} dx \\ &= \frac{1}{2}(1 - \log 2).\end{aligned}$$

Übersicht

https://www.bundesbank.de/resource/blob/644664/26eb6287c09eb598cabd7ed0d924b845/mL/0010-1999-vs-data.jpg

Gauß'sche Normalverteilung

Definition:

Die Gauß'sche Normalverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mit Parametern* $\mu \in \mathbb{R}$ *und* $\sigma^2 > 0$ *besitzt die Lebesguedichte*

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Der Graph einer solchen Lebesguedichte heißt
Gauß'sche Glockenkurve.

Normalverteilte Zufallsvariablen (I)

Wir schreiben $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, um anzuzeigen, dass die reellwertige Zufallsvariable X die Gauß'sche Normalverteilung auf $\mathbb{R}$ mit Parametern μ and σ^2 besitzt.

Wir nennen $\mathcal{N}(0,1)$ die Standardnormalverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Die Lebesguedichte von $\mathcal{N}(0,1)$ bezeichnen wir mit φ, und die zugehörige Verteilungsfunktion mit Φ.

Achtung:

Die Verteilungsfunktion Φ kann nicht in geschlossener Form angegeben werden!

A Normalverteilung

Verteilungsfunktion $\Phi(c) = \mathcal{N}_{0,1}(]-\infty, c]) = 1 - \Phi(-c)$ der Standardnormalverteilung. Den Wert etwa für $c = 1.16$ findet man in der Zeile 1.1 und Spalte .06: $\Phi(1.16) = 0.8770$. Das α-Quantil von $\mathcal{N}_{0,1}$ findet man, indem man den Wert α in der Tabelle lokalisiert und Zeilen- und Spaltenwert addiert: $\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$; einige Quantile stehen auch in Tabelle C. Für große Werte von c siehe Aufgabe 5.15.

c	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

Hans-Otto Georgii (2015): Stochastik, 5. Auflage. Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston

Normalverteilte Zufallsvariablen (II)

Ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und setzen wir $Z := (X - \mu)/\sigma$ für $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, so besitzt Z die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$.
Dies nennt man Standardisierung von X.

Starten wir umgekehrt mit einer standardnormalverteilten Zufallsvariable Z und setzen $X := \mu + \sigma \cdot Z$, so ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Rechenbeispiel zur Normalverteilung

Angenommen, $X \sim \mathcal{N}(\mu = -2, \sigma^2 = 9)$.
Wie groß ist die W'keit, dass X den Wert Null nicht übersteigt?

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 0) &= \mathbb{P}((X+2)/3 \leq 2/3) \\ &= \Phi(0.\bar{6}) \approx 0.747 \end{aligned}$$

Übersicht

Definition:

Für eine beliebige Indexmenge $I \neq \emptyset$ heißt eine Familie von Zufallsvariablen $(X_i)_{i \in I}$ mit $X_i : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\Omega_i', \mathcal{A}_i')$ stochastisch unabhängig, falls für jede nicht-leere endliche Teilmenge $K \subseteq I$ die Teilfamilie $(X_k)_{k \in K}$ stochastisch unabhängig ist in dem Sinne, dass gilt:

$$\mathbb{P}(\forall k \in K : X_k \in B_k) = \prod_{k \in K} \mathbb{P}(X_k \in B_k) \quad \text{für alle} \quad B_k \in \mathcal{A}_k'$$

Anmerkung:

Alle X_i sind auf dem selben W'raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert, können aber unterschiedliche Wertebereiche Ω_i' besitzen.

Charakterisierung über Verteilungsfunktionen

Satz:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *ein W'raum. Für* $d \in \mathbb{N}$ *seien* $X_1, \cdots, X_d$ *mit* $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ *reellwertige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion* F_{X_i} *von* X_i *für* $1 \leq i \leq d$*. Dann sind* $X_1, \cdots, X_d$ *genau dann stochastisch unabhängig, wenn für alle* $(x_1, \ldots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ *gilt:*

$$\mathbb{P}\left(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_d \leq x_d\right) = \prod_{i=1}^{d} F_{X_i}(x_i)$$

Übersicht

Definition: Chi-Quadrat-Verteilung

Sei $\nu \in \mathbb{N}$ eine vorgegebene Zahl.

Seien $X_1, \ldots, X_\nu$ stochastisch unabängige, reellwertige Zufallsvariablen, so dass $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ für alle $i \in \{1, \ldots, \nu\}$ gilt.

Dann heißt die Verteilung der Zufallsvariable

$$\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$$

die Chi-Quadrat-Verteilung mit ν Freiheitsgraden,
in Zeichen: χ^2_ν.

(Ernst Abbe, Jena, 1863)

Relevanz der Chi-Quadrat-Verteilung

Die Chi-Quadrat-Verteilung spielt eine wichtige Rolle in der Theorie statistischer Signifikanztests, mehr dazu in Kapitel 6.

Einige Schlagwörter:

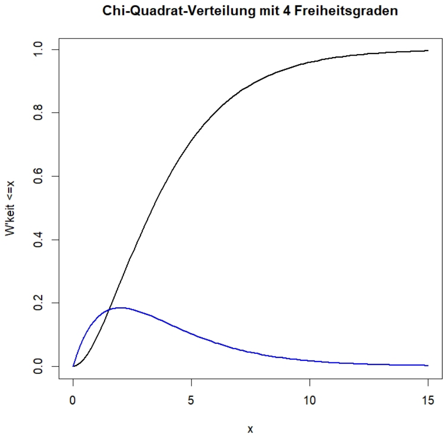
- Chi-Quadrat-Anpassungstest
- Chi-Quadrat-Test auf stochastische Unabhängigkeit
- Chi-Quadrat-Test zum Prüfen einer Varianz
- Chi-Quadrat-Test zum Modellvergleich
- und viele mehr

Lebesguedichte der Chi-Quadrat-Verteilung

Die Chi-Quadrat-Verteilung mit ν Freiheitsgraden besitzt die Lebesguedichte $f_{\chi^2_\nu}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, die gegeben ist durch

$$f_{\chi^2_\nu}(x) = \frac{x^{\nu/2-1} \cdot \exp(-x/2)}{2^{\frac{\nu}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \ x \geq 0.$$

Dabei bezeichnet Γ die Euler'sche Gammafunktion.



Blau: Lebesguedichte von χ_4^2

Schwarz: Verteilungsfunktion von χ_4^2

Definition: Fisher's F-Verteilung

Seien $X_1, \ldots, X_m$ sowie $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängige, reellwertige Zufallsvariablen, die allesamt jeweils standardnormalverteilt sind. Dann heißt die Verteilung von

$$\frac{m^{-1} \sum_{i=1}^{m} X_i^2}{n^{-1} \sum_{j=1}^{n} Y_j^2}$$

die Fisher'sche F-Verteilung mit m Zähler-Freiheitsgraden und n Nenner-Freiheitsgraden.

In Zeichen: $F_{m,n}$

Relevanz der Fisher'schen F-Verteilung

Die Fisher'sche F-Verteilung spielt ebenfalls eine wichtige Rolle in der Theorie statistischer Signifikanztests, mehr dazu in Kapitel 6.

Einige Schlagwörter:

- F-Test zum Vergleich von Varianzen
- F-Test für Vektoren von Regressionskoeffizienten
- etc.

Sir R. A. Fisher,

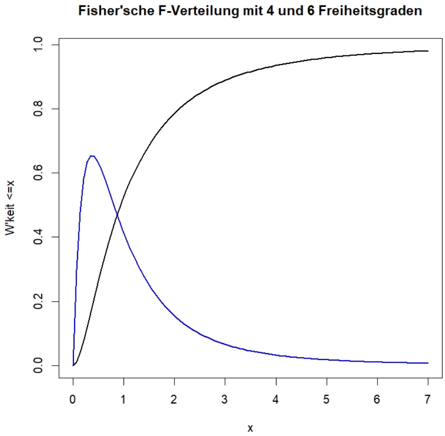
https://magazine.amstat.org/wp-content/uploads/2018/10/Fisher.jpg

Lebesguedichte der Fisher'schen F-Verteilung

Die Fisher'sche F-Verteilung mit m Zähler-Freiheitsgraden und n Nenner-Freiheitsgraden besitzt die Lebesguedichte $f_{m,n}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, die gegeben ist durch

$$f_{m,n}(x) = \frac{m^{m/2} n^{n/2}}{B(m/2, n/2)} \cdot \frac{x^{m/2-1}}{(n+mx)^{(m+n)/2}}, \; x \geq 0.$$

Dabei bezeichnet $B(\cdot,\cdot)$ die Euler'sche Betafunktion.



Blau: Lebesguedichte von $F_{4,6}$

Schwarz: Verteilungsfunktion von $F_{4,6}$

Definition: Studentische t-Verteilung

Seien X sowie $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängige, reellwertige Zufallsvariablen, die allesamt jeweils standardnormalverteilt sind. Dann heißt die Verteilung von

$$\frac{X}{\sqrt{n^{-1} \sum_{j=1}^{n} Y_j^2}}$$

die Studentische t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

In Zeichen: t_n

VOLUME VI MARCH, 1908 No. 1

BIOMETRIKA.

THE PROBABLE ERROR OF A MEAN.

BY STUDENT.

Introduction.

ANY experiment may be regarded as forming an individual of a "population" of experiments which might be performed under the same conditions. A series of experiments is a sample drawn from this population.

Now any series of experiments is only of value in so far as it enables us to form a judgment as to the statistical constants of the population to which the experiments belong. In a great number of cases the question finally turns on the value of a mean, either directly, or as the mean difference between the two quantities.

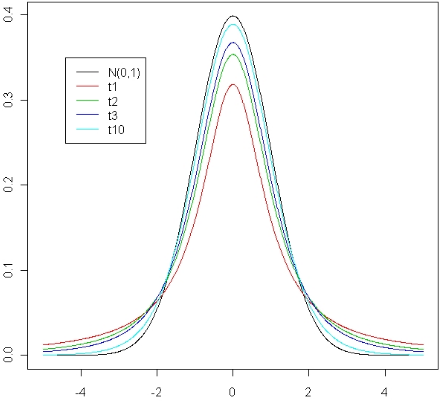
If the number of experiments be very large, we may have precise information

Lebesguedichte der Studentischen t-Verteilung

Die Studentische t-Verteilung mit n Freiheitsgraden besitzt die Lebesguedichte f_{t_n} auf $\mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f_{t_n}(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \left\{\sqrt{n}\, B(1/2, n/2)\right\}^{-1} .$$

Dabei bezeichnet $B(\cdot, \cdot)$ die Euler'sche Betafunktion.



Lebesguedichten von t-Verteilungen mit unterschiedlichen Freiheitsgraden, zusammen mit der Gauß'schen Glockenkurve

Übersicht

Überlebenszeitverteilungen

Eine Überlebenszeitverteilung ist eine W'keitsverteilung auf $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}))$.

Sie ist ein stochastisches Modell für die zufällige Wartezeit auf ein festgelegtes Zielereignis.

Im Falle einer stetigen Überlebenszeitverteilung wird dabei (implizit) angenommen, dass die Zeiten prinzipiell beliebig genau gemessen werden können.

(Abstraktion bzw. Idealisierung der Wirklichkeit)

Anwendungen von Überlebenszeitverteilungen

- Technik, Industrie, Qualitätskontrolle:
  Zeit bis zum Ausfall eines Bauteils
- Epidemiologie:
  Zeit bis zu einer (Neu-) Infektion
- Versicherungswirtschaft:
  Zeit bis zum (z. B. ersten) Schaden
- und viele weitere Anwendungsgebiete

Die Survivalfunktion

Sei T mit Werten in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Zufallsvariable, die die zufällige Zeitspanne bis zum Eintritt eines festgelegten Zielereignisses beschreibt.

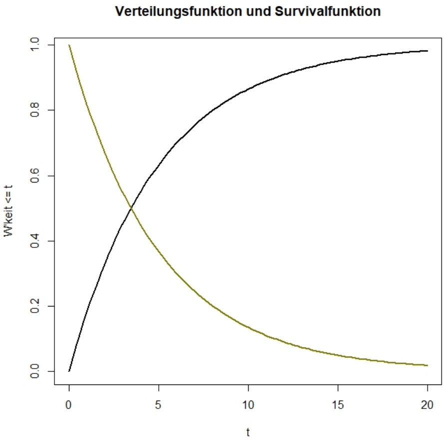
Sei $F_T : \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,1]$ die Verteilungsfunktion von T.

Dann heißt die Funktion S_T, gegeben durch

$$S_T(t) = 1 - F_T(t) = \mathbb{P}(T > t), \ t \geq 0,$$

die Survivalfunktion von T.

Für einen gegebenen Wert $t \geq 0$ gibt $S_T(t)$ die W'keit dafür an, dass der Zeitpunkt t Zielereignis-frei "überstanden" wird (beim terminalen Zielereignis also die Überlebensw'keit bis t).



Grün: Survivalfunktion

Schwarz: Verteilungsfunktion

Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist eine der grundlegendsten (stetigen) Überlebenszeitverteilungen.

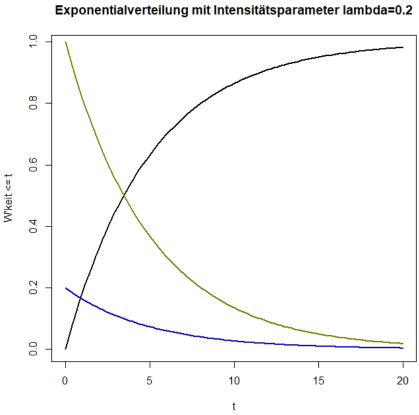
Sei $\lambda > 0$ eine vorgegebene reelle Zahl.

Dann besitzt die Zufallsvariable T die Exponentialverteilung mit Intensitätsparameter λ, falls T die Survivalfunktion $S_{\mathsf{Exp}(\lambda)}$ besitzt, die gegeben ist durch

$$S_{\mathsf{Exp}(\lambda)}(t) = \exp(-\lambda t),\ t \geq 0.$$

Die zugehörige Lebesguedichte auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist gegeben durch

$$f_{\mathsf{Exp}(\lambda)}(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t),\ t \geq 0.$$



Blau: Lebesguedichte von Exp(0.2)
Grün: Survivalfunktion von Exp(0.2)

Schwarz: Verteilungsfunktion von Exp(0.2)