Universität Bremen

FB3: Mathematik/Informatik

Prof. Dr. Daniel Neuen
Jens Schlöter

Wintersemester 2023/2024

Algorithmentheorie

Übungsblatt 6 (Abgabe am 22.01.2024, 12:15 Uhr)

Übung 6.1 (8 Punkte)

Telefonanrufe von New York nach Los Angeles werden wie folgt geroutet: Zuerst geht der Anruf entweder nach Chicago oder nach Memphis, dann wird er entweder durch Denver oder Dallas weitergeleitet, bevor er letztendlich in Los Angeles ankommt. Die Anzahl an Telefonleitungen kann unten stehender Tabelle entnommen werden. Die Aufgabe ist es, die maximale Anzahl an Telefongesprächen zwischen New York und Los Angeles zu bestimmen unter der Annahme, dass keine weiteren Telefonate Leitungen belegen.

Städte	Anzahl an Telefonleitungen
New York – Chicago	500
New York – Memphis	400
Chicago – Denver	300
Chicago – Dallas	250
Memphis – Denver	200
Memphis – Dallas	150
Denver – Los Angeles	400
Dallas – Los Angeles	350

(a) Modelliert das Problem als maximales Flussproblem und zeichnet das Netzwerk der Telefonleitungen.

(b) Berechnet mit Hilfe von Ford-Fulkerson einen maximalen Fluss in obigem Netzwerk. Gebt dabei die verwendeten augmentierenden Wege sowie den aktuellen Fluss nach jeder Erhöhung mit an.

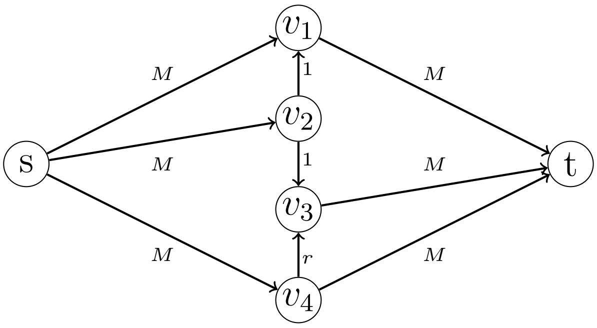
(c) Bestimmt den minimalen s-t-Schnitt C des Netzwerks. Gebt dabei die Schnittkapazität $cap(C)$ sowie die Kantenmenge an.

Übung 6.2 (7 Punkte)

(a) Zeigt, dass die Worst-Case Laufzeit von Ford-Fulkerson in $\Omega(M)$ liegt, für den maximalen Flusswert M, selbst wenn nur Graphen mit höchstens 8 Knoten betrachtet werden. Dazu reicht es, eine Familie von Eingabe-Instanzen mit wachsenden maximalen Flusswerten anzugeben, so dass die Laufzeit von Ford-Fulkerson auf diesen Instanzen linear zu den maximalen Flusswerten wächst. Zur Erinnerung: Die Kantenkapazitäten müssen natürliche Zahlen sein.

(b) Betrachtet die folgende Instanz des maximalen Flussproblems in der nicht alle Kantenkapazitäten auch natürlichen Zahlen sind, wobei $M \geq 2$ eine natürliche Zahl ist und $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Zeigt, dass es vorkommen kann, dass Ford-Fulkerson auf diesem Beispiel nicht terminiert.

Hinweis: Beobachtet, dass $r^j = r^{j-2} - r^{j-1}$ für alle $j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.



Übung 6.3 (5 Punkte)

Wir betrachten das maximale Flussproblem mit Kapazitäten auf den Knoten statt auf den Kanten. Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, A)$ mit Start- bzw. Endknoten $s, t \in V$ und Kapazitäten $c(v) \in \mathbb{N}$ für $v \in V \setminus \{s, t\}$ auf den Knoten. Durch einen Knoten $v \in V$ dürfen maximal $c(v)$ Einheiten eines Flusses fließen. Für einen Fluss f muss also $f_v^+ := \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) \leq c(v)$, für alle $v \in V \setminus \{s, t\}$ gelten.

Wie könnt ihr einen maximalen s-t-Fluss mit den bekannten Methoden für Graphen mit Kanten-Kapazitäten finden? Beschreibt dazu, wie der Eingabegraph verändert werden muss, damit bereits aus der Vorlesung bekannte Algorithmen verwendet werden können. Illustriert eure Lösung mit einer Skizze und beschreibt alle Änderungen detailliert.