Technische Informatik 1

Prof. Dr. Rolf Drechsler

Christina Plump

Überblick

Teil 1: Der Rechneraufbau (Kapitel 2-5)

- Rechner im Überblick
- Pipelining
- Speicher
- Parallelverarbeitung

Teil 2: Der Funktionalitätsaufbau (Kapitel 6-12)

- Kodierung
- **Grundbegriffe, Boolesche Funktionen**
  - **Boolesche Funktionen**
  - **Boolesche Algebren**
  - **Boolesche Ausdrücke**
- Darstellungsmöglichkeiten
- Schaltkreise, Synthese, spezielle Schaltkreise

Kapitel 7: Der boolesche Kalkulus

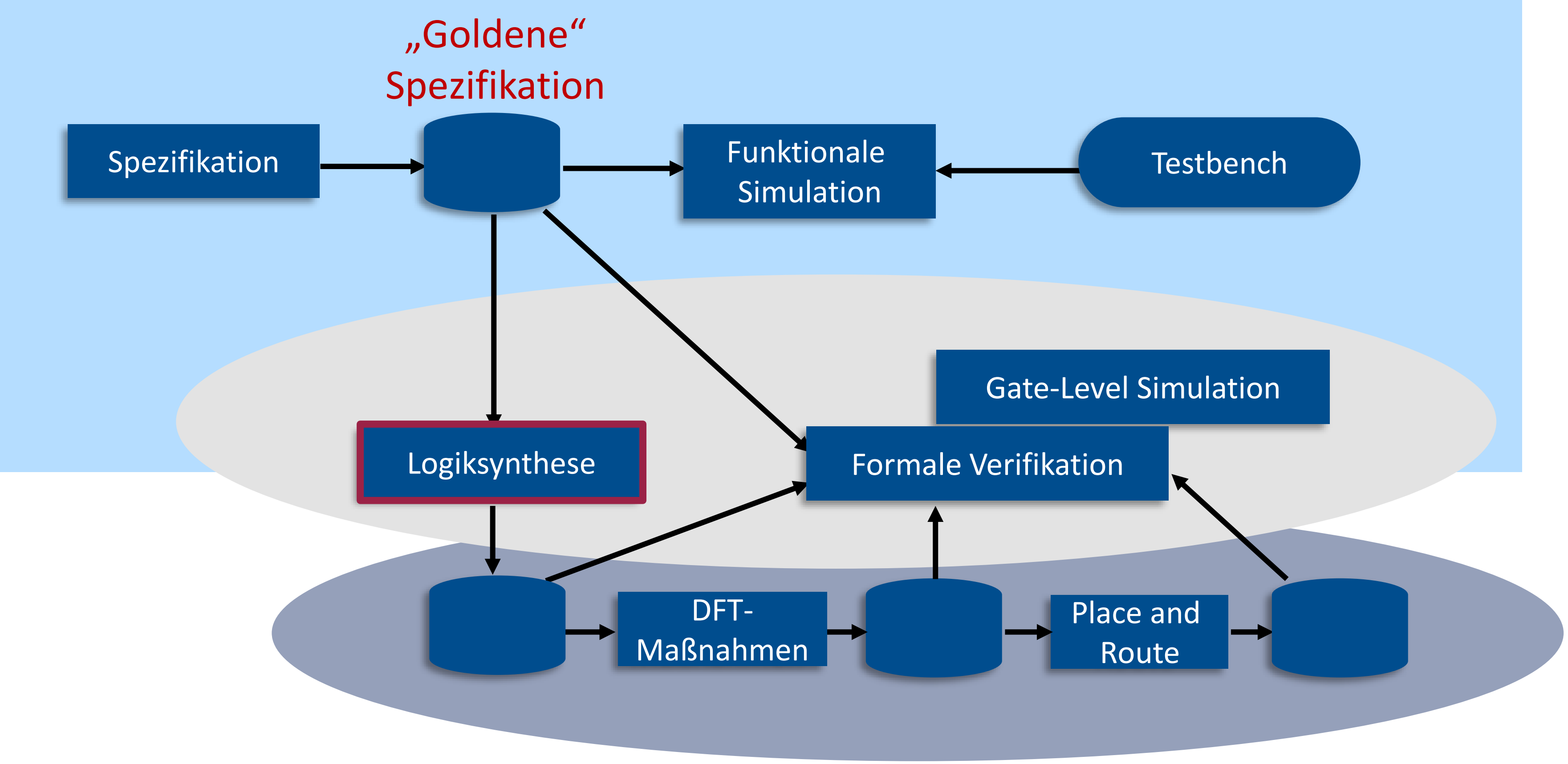
Einführung & Motivation

Boolesche Funktionen

Boolesche Algebra

Boolesche Ausdrücke

Ein kurzer Blick auf den Designflow



Logiksynthese und -minimierung

- Logiksynthese: Logik der Schaltung generieren
- Logikminimierung: Logik der Schaltung minimieren

- Unterscheidung zwischen:
  - Kombinatorischer Synthese: Realisierung einer booleschen Funktion
  - Sequentieller Synthese: Realisierung eines endlichen Automaten

Verfügbare Technologien

Nurlesespeicher	Read Only Memory (ROM) Programmable ROM (PROM) Erasable PROM (EPROM), ...
Zweistufige Realisierungen	Progr. Logische Felder (PLA)
Mehrstufige Realisierungen	Gate-Arrays- und Sea-of-Gates Entwurf Field Programmable Logic Arrays (FPGA)

Konkurrierende Optimierungsziele

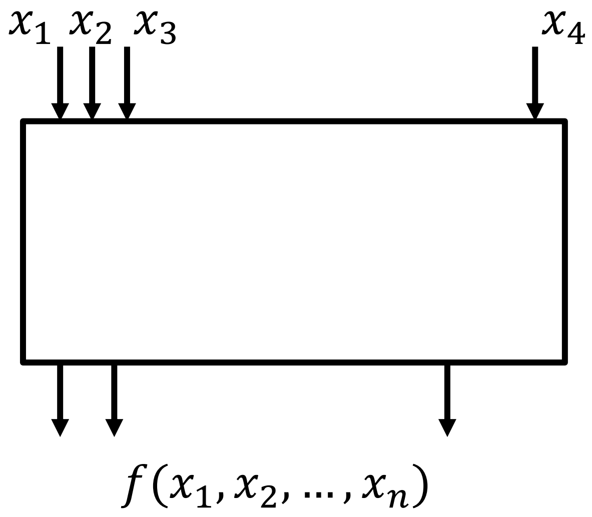
belegte Fläche	benötigte Reaktionszeiten	Testbarkeit	Leistungsverbrauch	Entwicklungszeit und -kosten
• Ausbeute	• Korrektheit des Gesamtsystems	• Korrektheit des verkauften Chips	• neue Märkte (Notebooks, Pads, Watches, IoT)	• time-to-market • Wirtschaftskraft der Kunden

Was wollen wir eigentlich?

Ausgangspunkt

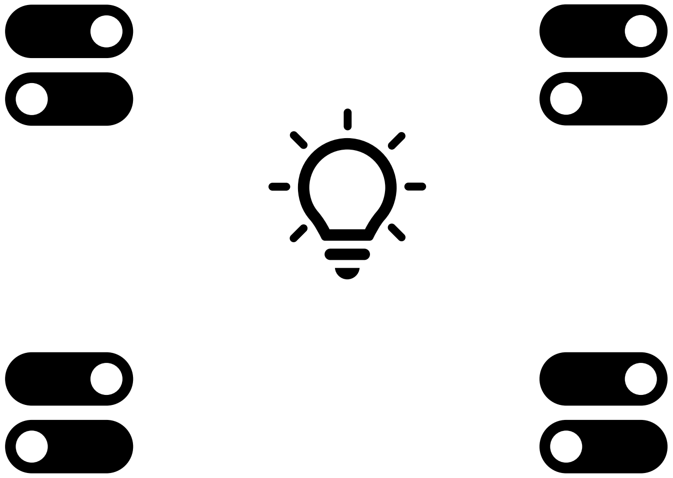
$$B \ := \ \{0{,}1\}$$

Ziel



Beispiel: Lampenschaltung

- Lampe leuchtet/leuchtet nicht in Abhängigkeit von vier Schaltern
- Modellierung des Problems
- Steuerung durch Schaltkreis
- Gibt es gute/schlechte Steuerungen?

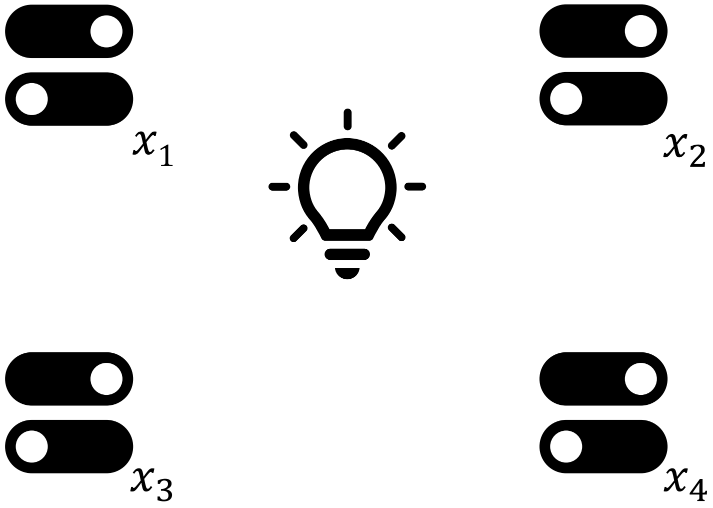


Beispiel: Lampenschaltung

- Zustände der Lampe:
  leuchtet („1“) oder **leuchtet nicht („0“)**
- Schalter x_1, x_2, x_3, x_4
  mit je zwei Stellungen „0“ und „1“
- Grundzustand:

  alle Schalter in Stellung 0 $\Leftrightarrow$ Lampe **leuchtet nicht**
- Genau ein Schalter ändert seine Stellung

$\Rightarrow$ Lampe ändert ihren Zustand



Modellierung

Grundzustand:

x_1	x_2	x_3	x_4	**Lampe**
0	0	0	0	0

Ein Schalter gedrückt:

x_1	x_2	x_3	x_4	**Lampe**
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1

Zwei Schalter gedrückt:

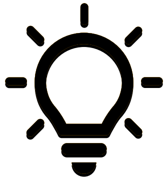
x_1	x_2	x_3	x_4	**Lampe**
1	1	0	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0

Drei Schalter gedrückt:

x_1	x_2	x_3	x_4	**Lampe**
1	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1

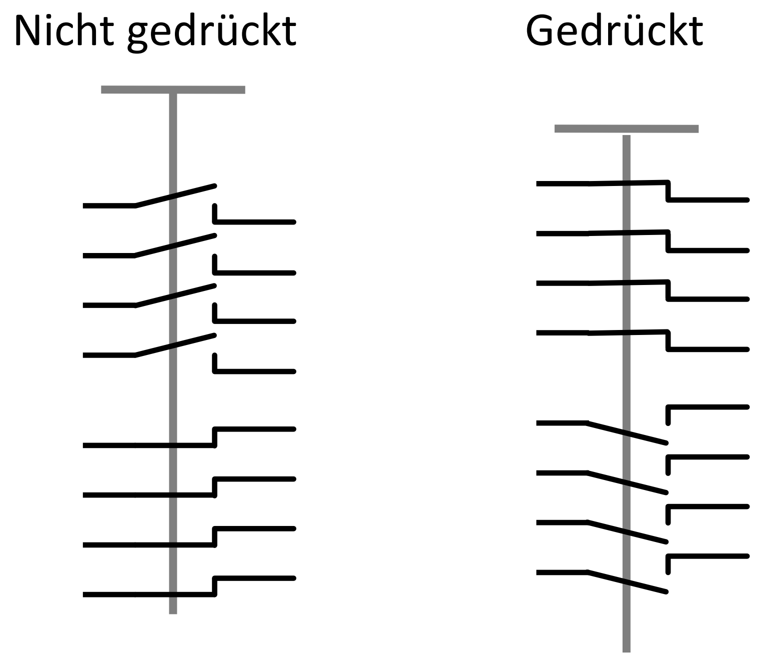
Vier Schalter gedrückt:

x_1	x_2	x_3	x_4	**Lampe**
1	1	1	1	0



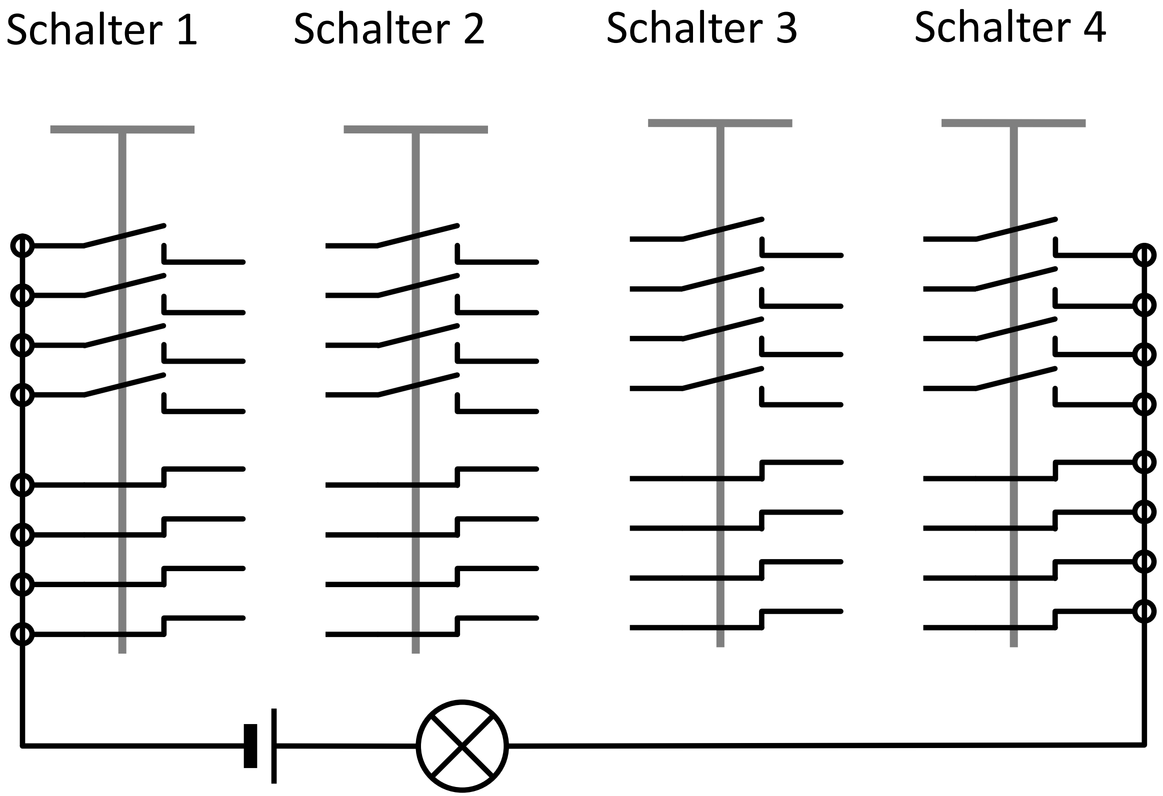
Erste Realisierung

- Acht „leuchtende“ Kombinationen: Pro Schalter acht Kontakte
  - Vier Kontakte geschlossen
  - Vier Kontakte offen



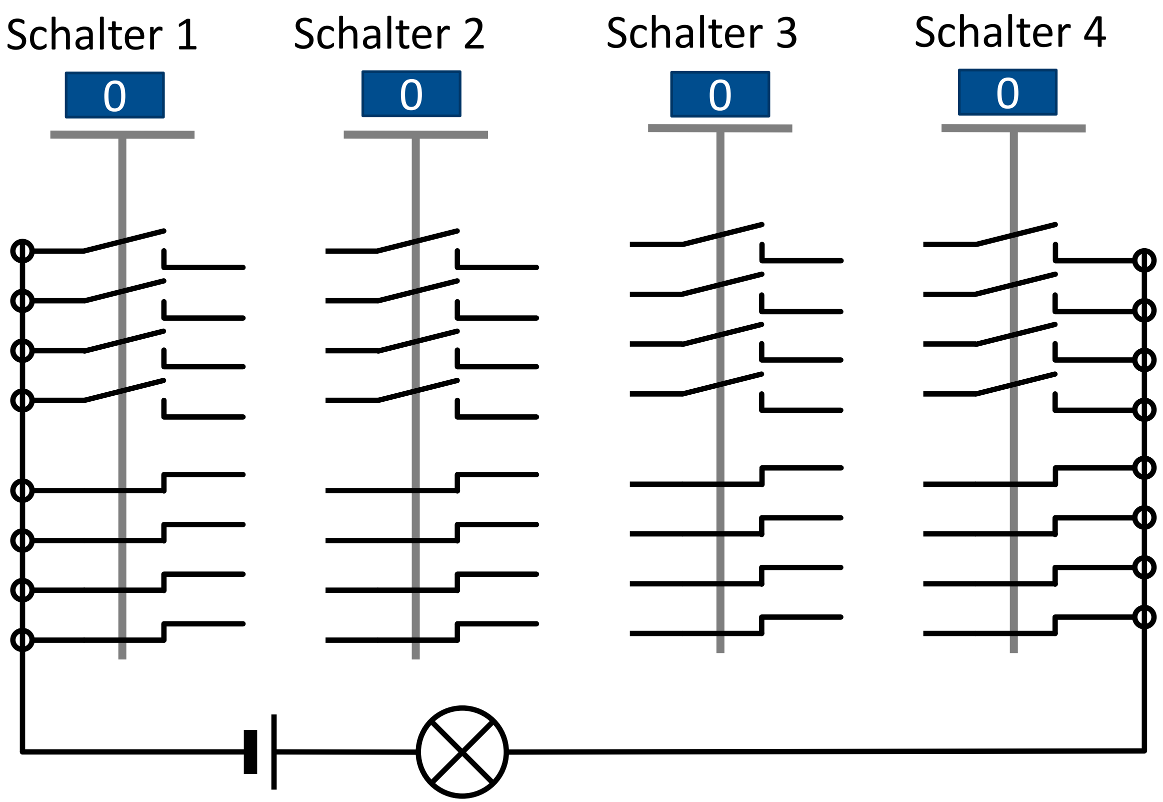
Erste Realisierung

- Acht „leuchtende“ Kombinationen: Pro Schalter acht Kontakte
  - Vier Kontakte geschlossen
  - Vier Kontakte offen



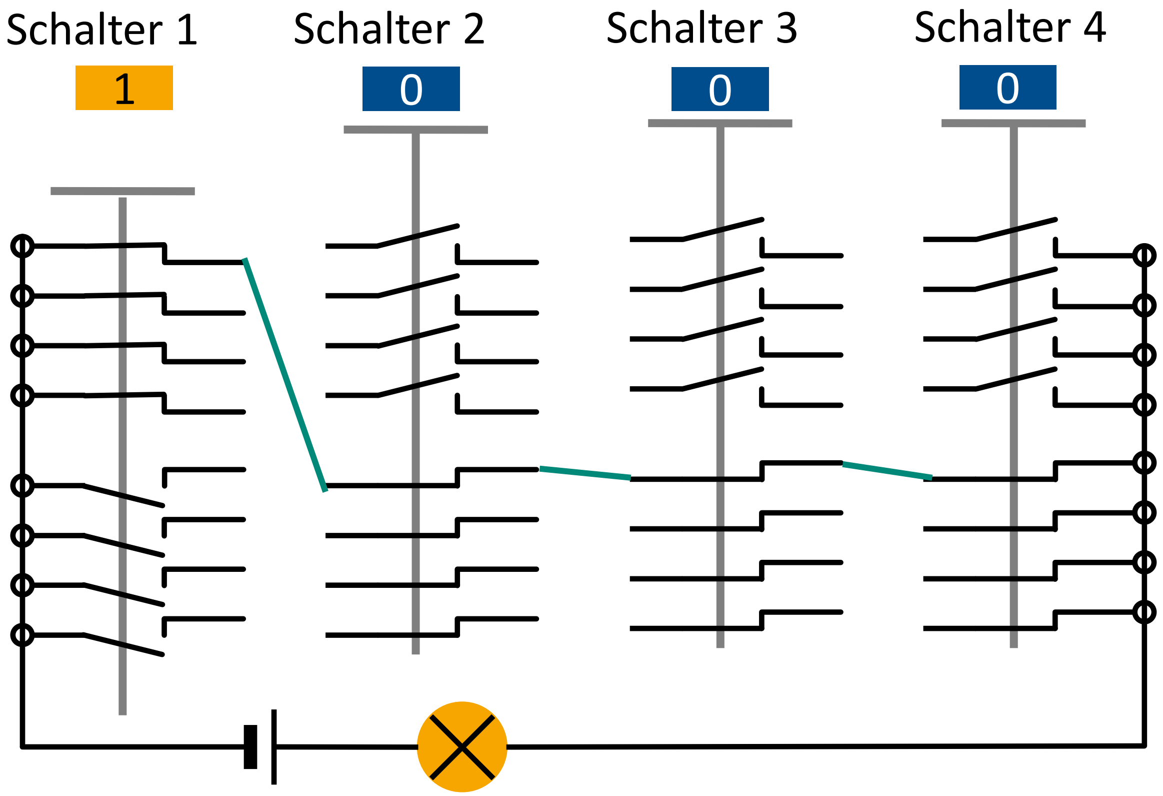
Erste Realisierung

- Acht „leuchtende“ Kombinationen: Pro Schalter acht Kontakte
  - Vier Kontakte geschlossen
  - Vier Kontakte offen
- Pro „leuchtende“ Kombination: Realisiere geschlossenen Stromkreis



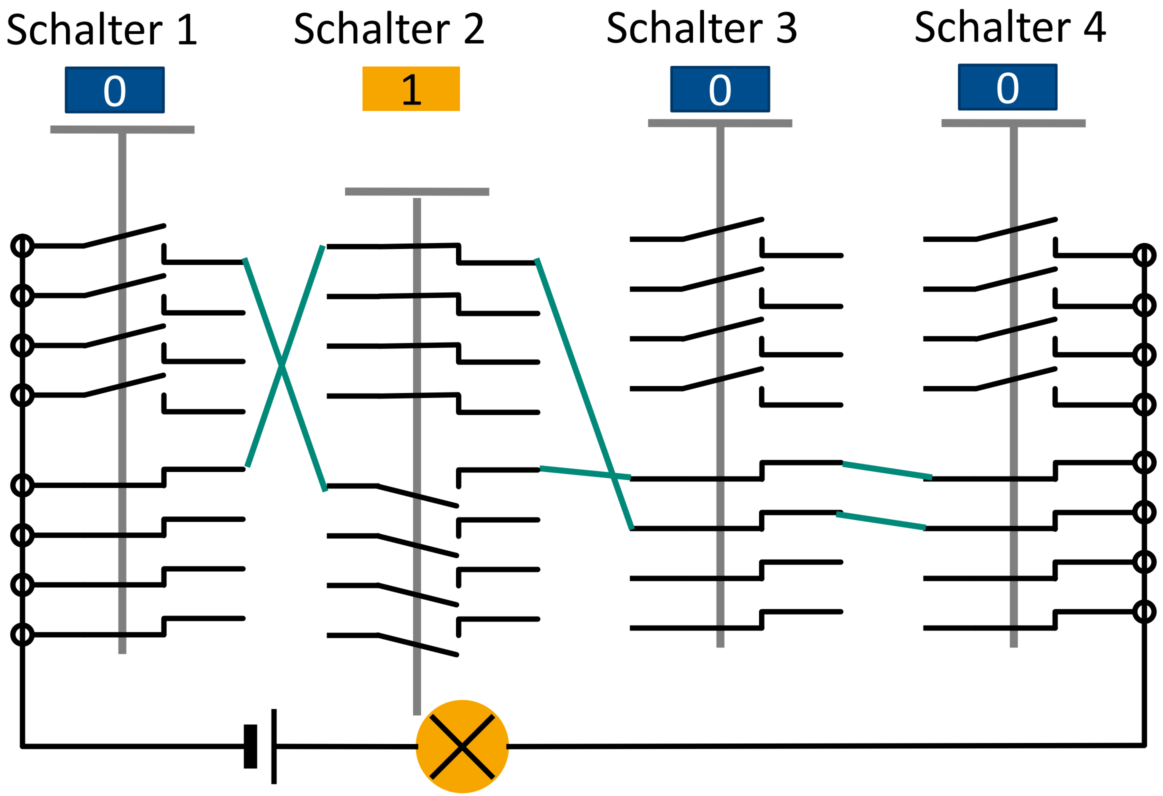
Erste Realisierung

- Acht „leuchtende“ Kombinationen: Pro Schalter acht Kontakte
  – Vier Kontakte geschlossen
  – Vier Kontakte offen
- Pro „leuchtende“ Kombination: Realisiere geschlossenen Stromkreis
  – (1,0,0,0)



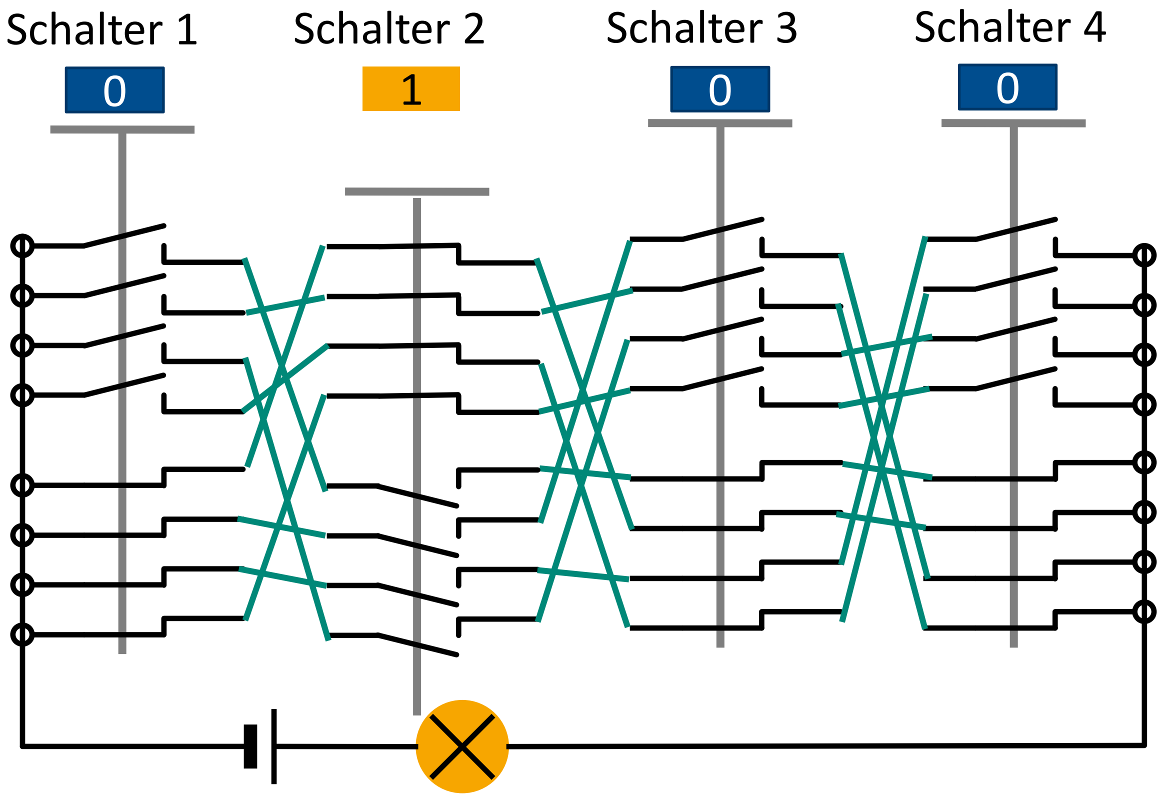
Erste Realisierung

- Acht „leuchtende“ Kombinationen: Pro Schalter acht Kontakte
  - Vier Kontakte geschlossen
  - Vier Kontakte offen
- Pro „leuchtende“ Kombination: Realisiere geschlossenen Stromkreis
  - (1,0,0,0)
  - (0,1,0,0)



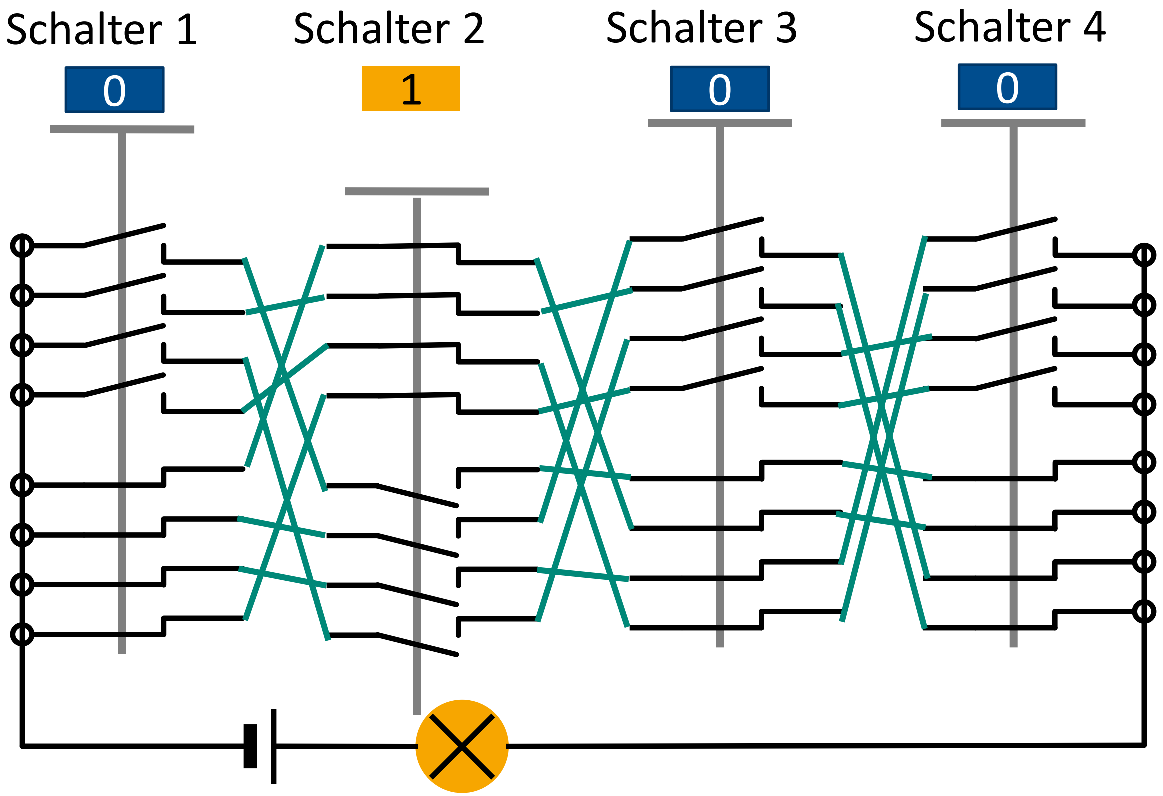
Erste Realisierung

- Acht „leuchtende“ Kombinationen: Pro Schalter acht Kontakte
  - Vier Kontakte geschlossen
  - Vier Kontakte offen
- Pro „leuchtende“ Kombination: Realisiere geschlossenen Stromkreis
  - (1,0,0,0)
  - (0,1,0,0)
  - (noch 6 Mal)



Erste Realisierung

- Acht „leuchtende“ Kombinationen: Pro Schalter acht Kontakte
  - Vier Kontakte geschlossen
  - Vier Kontakte offen
- Pro „leuchtende“ Kombination: Realisiere geschlossenen Stromkreis
  - (1,0,0,0)
  - (0,1,0,0)
  - (noch 6 Mal)
- Bei k Schaltern $k \cdot 2^k$ Kontakte nötig

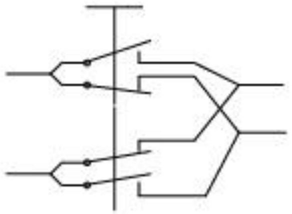


Lampe leuchtet stets bei ungerader Anzahl an Schaltern

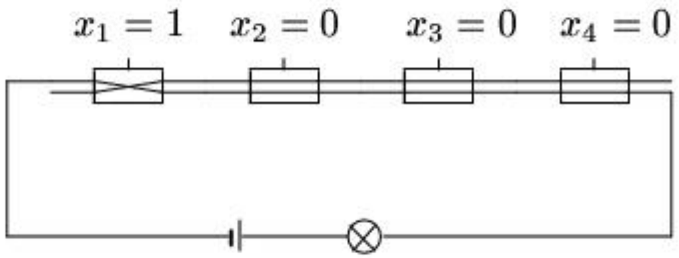
Zweite Realisierung

Neuer Baustein

Aber wie kann das umgesetzt werden?



Insgesamt:



bei k Schaltern: $4 \cdot k$ Kontakte

Fazit

- Viele Fragen bezüglich
  - Modellierung
  - Realisierung
  - Bausteintypen
  - Kosten
- Im folgenden „Bottom-up“ – Ansatz
  - Aufbau boolescher Funktionen (Kapitel 7)
  - Minimierung von Funktionen (Kapitel 8)
  - Andere Repräsentationsmöglichenkeiten für boolesche Funktionen (Kapitel 9)
  - Aufbau von Schaltkreisen (Kapitel 10)

Kapitel 7: Der boolesche Kalkulus

Einführung & Motivation

Boolesche Funktionen

Boolesche Algebra

Boolesche Ausdrücke

Lernziele

- Konzept der Booleschen Funktion kennen und verstehen
- Mit Booleschen Funktionen verbundene Terminologie kennen und anwenden können
- Relationsoperator „kleiner“ für Boolesche Funktionen kennen lernen

Boolesche Funktionen

Definition (Boolesche Funktion):
Sei $f\colon \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^m$ eine Abbildung. Dann heißt f (vollständig definierte) Boolesche Funktion in n Variablen. Die Menge $\mathcal{B}_{n,m} \coloneqq \{f \mid f\colon \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^m\}$ umfasst alle Booleschen Funktionen in n Variablen mit m Ausgabevariablen.

Beispiel:
Sei $n = 2$ und $m = 1$. Dann ist $f\colon \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$ mit $f(0,0) = f(1,1) = 0$ und $f(0,1) = f(1,0) = 1$ eine Boolesche Funktion in zwei Variablen.

Definition (partielle Boolesche Funktion):
Sei $D \subset \mathbb{B}^n$ und $f\colon D \rightarrow \mathbb{B}^m$ eine Abbildung. Dann heißt f partielle Boolesche Funktion in n Variablen. Die Menge $\mathcal{B}_{n,m}(D) \coloneqq \{f \mid f\colon D \rightarrow \mathbb{B}^m\}$ umfasst alle partiellen Booleschen Funktionen in n Variablen auf der Menge D mit m Ausgabevariablen.

Beispiel:
Sei $n = 2$ und $m = 1$, $\mathrm{D} = \{(0,0), (0,1)\}$. Dann ist $f\colon D \rightarrow \mathbb{B}$ mit $f(0,0) = 0$ und $f(0,1) = 1$ eine partielle Boolesche Funktion in zwei Variablen.

Erfüllbarkeits- und Nichterfüllbarkeitsmengen ON(f), OFF(f)

Definition (Erfüllbarkeitsmenge):
Sei $m = 1$ und f eine Boolesche Funktion in n Variablen. Dann heißt die Menge $ON(f) \coloneqq \{\alpha \in \mathbb{B}^n | f(\alpha) = 1\}$ Erfüllbarkeitsmenge von f.

Beispiel:
Sei $n = 2$ und $m = 1$ und $f: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$ mit $f(0,0) = f(1,1) = 0$ und $f(0,1) = f(1,0) = 1$ eine Boolesche Funktion in zwei Variablen. Dann ist $ON(f) = \{(0,1), (1,0)\}$.

Definition (Nichterfüllbarkeitsmenge):
Sei $m = 1$ und f eine Boolesche Funktion in n Variablen. Dann heißt die Menge $OFF(f) \coloneqq \{\alpha \in \mathbb{B}^n | f(\alpha) = 0\}$ Nichterfüllbarkeitsmenge von f.

Beispiel:
Sei $n = 2$ und $m = 1$ und $f: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$ mit $f(0,0) = f(1,1) = 0$ und $f(0,1) = f(1,0) = 1$ eine Boolesche Funktion in zwei Variablen. Dann ist $OFF(f) = \{(0,0), (1,1)\}$.

Definitionsbereich und „don‘t-care“-Bereich

Definition (Definitionsbereich):
Sei $m = 1$ und f eine partielle Boolesche Funktion in n Variablen. Dann heißt die Menge $def(f) \coloneqq \{\alpha \in \mathbb{B}^n | f(\alpha)\ definiert\}$ Definitionsbereich von f.

Beispiel:
Sei $n = 2$ und $m = 1, \mathrm{D} = \{(0,0), (0,1)\}$ und $f: D \to \mathbb{B}$ mit $f(0,0) = 0$ und $f(0,1) = 1$ eine partielle Boolesche Funktion in zwei Variablen. Dann ist $def(f) = \{(0,0), (0,1)\}$.

Definition („don‘t-care“-Bereich):
Sei $m = 1$ und f eine partielle Boolesche Funktion in n Variablen. Dann heißt die Menge $\mathrm{DC}(f) \coloneqq \{\alpha \in \mathbb{B}^n | f(\alpha)\ nicht\ definiert\}$ „don‘t-care“-Bereich von f.

Beispiel:
Sei $n = 2$ und $m = 1, \mathrm{D} = \{(0,0), (0,1)\}$ und $f: D \to \mathbb{B}$ mit $f(0,0) = 0$ und $f(0,1) = 1$ eine partielle Boolesche Funktion in zwei Variablen. Dann ist $DC(f) = \{(1,0), (1,1)\}$.

Relation zwischen Booleschen Funktionen

Definition (Relation):
Seien f und g Boolesche Funktionen in n Variablen. f heißt kleiner als g, wenn $f(\alpha) \leq g(\alpha)\ \ \forall \alpha \in \mathbb{B}^n$ gilt. Es wird notiert: $f \leq g$

Beispiel:
Seien $f\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ mit $f(0,0) = f(0,1) = f(1,0) = \ 0$ und $f(1,1) = 1$ und $g\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ mit $f(0,1) = f(1,0) = f(1,1) = 1$ und $f(0,0) = 0$ zwei Boolesche Funktionen in zwei Variablen.
Dann gilt: $f \leq g$, denn für $\alpha_1 = (0,0)$: $f(\alpha_1) = g(\alpha_1)$, für $\alpha_2 = (0,1)$: $f(\alpha_2) < g(\alpha_2)$, für $\alpha_3 = (1,0)$: $f(\alpha_3) < g(\alpha_3)$, für $\alpha_4 = (1,1)$: $f(\alpha_4) = g(\alpha_4)$.
Wir sagen auch $AND \leq\ OR$.

Kapitel 7: Der boolesche Kalkulus

Lernziele

- Konzept einer Booleschen Algebra kennen und verstehen
- Definition einer Booleschen Algebra kennen und zum Test auf die Eigenschaft anwenden können
- Rechenregeln einer booleschen Algebra kennen und anwenden können
- Prinzip der Dualität kennen und verstehen

Boolesche Algebra

Definition:

Sei M eine endliche Menge, auf der zwei binäre Operationen $\cdot$ und $+$ und eine unäre Operation $\overline{}$ definiert sind. Das Tupel $(M, \cdot, +, \overline{})$ heißt Boolesche Algebra, wenn folgende Axiome für alle $x, y, z \in M$ gelten.

Axiom	Erster binärer Operator	Zweiter binärer Operator
Kommutativität	$x \cdot y = y \cdot x$	$x + y = y + x$
Assoziativität	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Distributivität	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
Absorption	$x \cdot (x + y) = x$	$x + (x \cdot y) = x$
Auslöschung	$x \cdot (y + \overline{y}) = x$	$x + (y \cdot \overline{y}) = x$

Abgeleitete Rechenregeln in der Booleschen Algebra

Satz:
Sei $(M, \cdot, +, \overline{})$ eine Boolesche Algebra. Dann gelten die folgenden Regeln: Die Existenz neutraler Elemente für beide binären Operatoren, die Idempotenz, die De Morganschen Regeln und der Consensus.

Regeln	**Erster binärer Operator**	**Zweiter binärer Operator**
Neutrale Elemente	$\exists e_{\cdot} \in M\colon \forall x \in M\colon x \cdot e_{\cdot} = x$	$\exists e_{+} \in M\colon \forall x \in M\colon x + e_{+} = 1$
Idempotenz	$x \cdot x = x$	$x + x = x$
De Morgan	$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$	$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
Consensus	$(x \cdot y) + (\overline{x} \cdot z) = (x \cdot y) + (\overline{x} \cdot z) + (y \cdot z)$	$(x + y) \cdot (\overline{x} + z) = (x + y) \cdot (\overline{x} + z) \cdot (y + z)$

Dualitätsprinzip bei Booleschen Algebren

Satz (Prinzip der Dualität):
Sei p_{dual} die aus p abgeleitete duale Gleichung. Diese geht durch das gleichzeitige Vertauschen der binären Operatoren sowie der neutralen Elemente aus p hervor. Ist p gültig, so ist auch p_{dual} gültig.

Beispiel:

Wenn $(x \cdot y) + (\overline{x} \cdot z) + (y \cdot z) = (x \cdot y) + (\overline{x} \cdot z)$ gilt, gilt auch $(x + y) \cdot (\overline{x} + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (\overline{x} + z)$.

Beispiel 1 – Die Potenzmengen-Algebra

Satz:
Sei S eine Menge, $M = 2^S$ die Potenzmenge von S. Sei $\cup: M \times M \to M$ die Vereinigung zweier Mengen und $\cap: M \times M \to M$ die Schnittmenge zweier Mengen und $\overline{}: M \to M$ das Komplement einer Menge in S. Dann ist $(M, \cap, \cup, \overline{})$ eine boolesche Algebra.

Erläuterung:

- $M = 2^S$
- Erste binäre Operation: $m_1 \cdot m_2 = m_1 \cap m_2$
- Zweite binäre Operation: $m_1 + m_2 = m_1 \cup m_2$
- Unäre Operation: $\overline{m} = S \setminus m$

Beispiel 2 – Die zweielementige Algebra (ganzzahlige Operation)

Satz:
Sei $B = \{0,1\}$. Seien $+: B \times B \to B$ definiert als $a + b \coloneqq a + b - ab$, $\cdot: B \times B \to B$ definiert als $a \cdot b \coloneqq a \cdot b$ und $\overline{}: B \to B$ definiert als $\overline{b} \coloneqq 1 - b$, wobei $a, b \in B$. Dann ist $\left(B, \cdot, +, \overline{}\right)$ eine boolesche Algebra.

Erläuterung:
- $B = \{0,1\}$
- Erste binäre Operation: $b_1 \cdot b_2 = b_1 \quad b_2$
- Zweite binäre Operation: $b_1 + b_2 = b_1 + b_2 - b_1 b_2$
- Unäre Operation: $\overline{b} = 1 - b$

Beispiel 2 – Die zweielementige Algebra (logische Operation)

Satz:

Sei $B = \{0,1\}$. Seien $+ : B \times B \to B$ definiert als $a + b \coloneqq a \vee b$, $\cdot : B \times B \to B$ definiert als $a \cdot b \coloneqq a \wedge b$ und $\overline{} : B \to B$ definiert als $\overline{b} \coloneqq \overline{b}$, wobei $a, b \in B$. Dann ist $\left(B, \cdot, +, \overline{}\right)$ eine boolesche Algebra.

Erläuterung:

- $B = \{0,1\}$
- Erste binäre Operation: $b_1 \cdot b_2 = b_1 \wedge b_2$
- Zweite binäre Operation: $b_1 + b_2 = b_1 \vee b_2$
- Unäre Operation: $\overline{b} = \overline{b}$

Beispiel 3 – Die Algebra der booleschen Funktionen

Satz:
Sei $\mathcal{B}_n \coloneqq \mathcal{B}_{n,1}$. Seien $+ : \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_n$ definiert als $f + g \coloneqq f(\alpha) \vee g(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{B}^n$, $\cdot : \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_n$ definiert als $a \cdot b \coloneqq f(\alpha) \wedge g(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{B}^n$ und $\overline{} : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_n$ definiert als $\overline{f}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0\ \ \forall \in \mathbb{B}^n$, wobei $f, g \in \mathcal{B}_n$. Dann ist $\left(\mathcal{B}_n, \cdot, +, \overline{}\right)$ eine boolesche Algebra.

Erläuterung - hier ausgelassen für die Übungsaufgabe

Mehrere Fragen:

- Wie können alle booleschen Funktionen in n Variablen allgemein beschrieben werden?
- Lassen sie sich aus Basisfunktionen zusammensetzen?
- Welche Basisfunktionen sind wichtig?

Kapitel 7: Der boolesche Kalkulus

Einführung & Motivation

Boolesche Funktionen

Boolesche Algebra

Boolesche Ausdrücke

Lernziele

- Boolesche Ausdrücke als Konzept kennen und ihre Definition verstehen
- Zusammenhang zwischen Booleschen Ausdrücken und Booleschen Funktionen verstehen
- Begriffe positives/negatives Literal, (vollständiges) Monom, Minterm und (vollständiges) Polynom kennen und korrekt benutzen
- Bedeutung der kanonischen disjunktiven Normalform kennen und verstehen

Boolesche Ausdrücke

- Eine Beschreibungsmöglichkeit für Boolesche Funktionen

- bisher: Tabellenform (siehe Lampenbeispiel)

  $\Longrightarrow$ bei n Variablen 2^n Einträge

- jetzt: nutze algebraische Struktur zur Beschreibung

Boolesche Ausdrücke

Vereinbarung: $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $A = X_n \cup \left\{0,1,+,\cdot,\overline{},(,)\right\}$ ein Alphabet.

Definition (Boolesche Ausdrücke):
Die Menge $BE(X_n) \subset A^*$ der vollständig geklammerten Booleschen Ausdrücke über X_n ist folgendermaßen induktiv über A definiert:

- $0,1 \in BE(X_n)$ (Die Elemente 0 und 1 sind Boolesche Ausdrücke)
- $X_n \subset BE(X_n)$ (Variablen sind Boolesche Ausdrücke)
- $\forall\, e_1, e_2 \in BE(X_n)$: (Sind e_1, e_2 Boolesche Ausdrücke, dann sind auch)
  - $(e_1 + e_2) \in BE(X_n)$ (die Disjunktion)
  - $(e_1 \cdot e_2) \in BE(X_n)$ (die Konjunktion)
  - $\overline{e_1} \in BE(X_n)$ (die Negation boolesche Ausdrücke)
- Nichts sonst ist ein Boolscher Ausdruck

Schreibweise:
- Negation bindet stärker als Konjunktion, Konjunktion bindet stärker als Disjunktion
- Klammern können häufig ohne Mehrdeutigkeiten weggelassen werden

Interpretation Boolescher Ausdrücke

Satz (Zuordnung Boolescher Ausdrücke zu Funktionen):
Sei $BE(X_n)$ die Menge Booleschen Ausdrücke über X_n und $\mathcal{B}_n$ die Menge der Booleschen Funktionen in n Variablen.
Dann existiert eine eindeutige Zuordnung $\psi: BE(X_n) \rightarrow \mathcal{B}_n$ von Booleschen Ausdrücken zu Booleschen Funktionen.

Beweis:
Definiere ψ folgendermaßen induktiv:

- $\psi(0) = \mathbf{0}, \psi(1) = \mathbf{1}$
- $\psi(x_i) = f_i, f_i(\alpha) = \alpha_i \;\; \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{B}^n$
- $\psi((e_1 + e_2)) = \psi(e_1) + \psi(e_2)$
- $\psi((e_1 \cdot e_2)) = \psi(e_1) \cdot \psi(e_2)$
- $\psi(\overline{e_1}) = \overline{\psi(e_1)}$

Sprechweise:
Gilt $\psi(e) = f$, so ist e ein Boolescher Ausdruck von f, bzw. e beschreibt die Boolesche Funktion f.

Interpretation Boolescher Ausdrücke

Definition (Äquivalenz von Booleschen Ausdrücken):
Zwei Boolesche Ausdrücke e_1 und e_2 heißen äquivalent $(e_1 \equiv e_2)$ genau dann, wenn sie die gleichen Boolesche Funktion beschreiben: $\psi(e_1) = \psi(e_2)$

Überlegung:

Jeder Boolesche Ausdruck definiert eine Boolesche Funktion. Wie ist es mit der Umkehrung?

Spezielle Boolesche Ausdrücke: Literale, Monome und Minterme

- Literale sind boolesche Ausdrücke x_i und $\overline{x_i}$
  - Positives Literal: x_i
  - Negatives Literal: $\overline{x_i}$
- Monome sind eine Konjunktion von Literalen, wenn zusätzlich folgendes gilt:
  - jedes Literal kommt höchstens einmal vor
  - es kommt nicht sowohl das positive als auch das negative Literal einer Variable vor
- Minterme oder vollständige Monome sind Monome, in denen jede Variable entweder als positives oder als negatives Literal vorkommt.

Definition (Minterm):
Für ein $\alpha \in \mathbb{B}^n$ heißt $m(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ der zu α gehörende Minterm (für $\alpha_i = 0{:}\, x_i^{\alpha_i} = \overline{x_i}$, für $\alpha_i = 1{:}\, x_i^{\alpha_i} = x_i$)

Spezielle Boolesche Ausdrücke: Polynome und Normalformen

- Polynome sind eine Disjunktion von paarweise verschiedenen Monomen
- Vollständige Polynome bestehen nur aus vollständigen Polynomen

Es gibt auch weitere Normalformen: KNF, Parity Polynome

- Disjunktive Normalformen einer Booleschen Funktion f sind Polynome von f
- Kanonische Disjunktive Normalformen einer Booleschen Funktion f sind vollständige Polynome von f

Definition (Kanonische Disjunktive Normalform - KDNF):
Sei $f \in \mathcal{B}_n$ eine Boolesche Funktion in n Variablen. Dann heißt $e = \sum_{\alpha \in ON(f)} m(\alpha)$ kanonische disjunktive Normalform von f .

Satz (Eindeutigkeit der KDNF):
Die kanonische disjunktive Normalform einer Boolschen Funktion f ist eindeutig.

Boolesche Funktionen & Boolesche Ausdrücke

Lemma:

(1) Zu jeder Booleschen Funktion f gibt es einen Booleschen Ausdruck e, der f beschreibt ($\forall f \in \mathcal{B}_n: \exists e \in BE(X_n): \psi(e) = f$).

(2) Für eine feste Boolesche Funktion f gibt es mehrere Boolesche Ausdrücke e, die f beschreiben.

Beweis:

(ad 1) Es existiert immer die kanonische disjunktive Normalform, für die gilt: $\psi\left(\sum_{\alpha \in ON(f)} m(\alpha)\right) = f$

(ad 2) Für jeden Booleschen Ausdruck e gilt: $\psi(e) = \psi(e + e) = \psi(e + e + e)$ ..., d.h. es gibt unendlich viele Boolesche Ausdrücke e, die eine Boolesche Funktion beschreiben.

Fragen

Wenn es nun viele Polynome (Boolesche Ausdrücke) für eine Funktion f gibt, ...

(1) Wie findet man ein geeignetes Polynom (Booleschen Ausdruck)?

(2) Haben Polynome (Boolesche Ausdrücke) ein Pendant in der „Realität“?

Überblick

Teil 1: Der Rechneraufbau (Kapitel 2-5)	Teil 2: Der Funktionalitätsaufbau (Kapitel 6-12)
• Rechner im Überblick • Pipelining • Speicher • Parallelverarbeitung	• Kodierung • **Grundbegriffe, Boolesche Funktionen** • Darstellungsmöglichkeiten • Schaltkreise, Synthese, spezielle Schaltkreise