

Prof. Dr. Daniel Neuen
Jens Schlöter

Wintersemester 2023/2024

Algorithmentheorie

Präsenzübung 3

Präsenzübung 3.1

Beweist folgende Sätze aus der Vorlesung.

Satz (Handshake Lemma). In einem einfachen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Satz. In einem einfachen ungerichteten Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Präsenzübung 3.2

Gebt einen Algorithmus an, der für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ entscheidet, ob dieser kreisfrei ist. Die Laufzeit des Algorithmus soll linear in der Eingabegröße des Graphen ($\mathcal{O}(|V| + |E|)$) sein. Zeigt, dass Euer Algorithmus korrekt ist und die gewünschte Laufzeit erzielt.

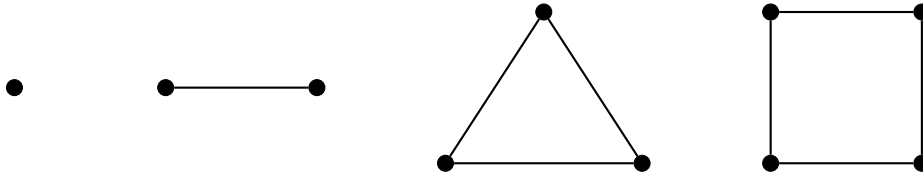
Präsenzübung 3.3

- (a) Gegeben seien natürliche Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, M]$ für ein ebenfalls gegebenes $M \in \mathbb{N}$. Wir suchen eine Teilmenge $S \subseteq [0, M]$ mit kleinstmöglicher Kardinalität, so dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein $s \in S$ existiert mit $|s - x_i| \leq 5$. Gebt einen Algorithmus an, der dieses Problem in Zeit $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ löst. Zeigt, dass euer Algorithmus korrekt ist und die gewünschte Laufzeit erzielt.
- (b) Gegeben sei eine Menge von natürlichen Zahlen $X \subseteq [0, M]$ für ein ebenfalls gegebenes $M \in \mathbb{N}$. Wir suchen eine Teilmenge $S \subseteq X$ mit kleinstmöglicher Kardinalität, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:
- (i) Es gibt ein $s \in S$ mit $s \leq 20$.
 - (ii) Es gibt ein $s \in S$ mit $M - s \leq 20$.
 - (iii) Seien $s_1, \dots, s_{|S|}$ die Zahlen in S in aufsteigender Sortierung. Dann gilt $s_i - s_{i-1} \leq 20$ für alle $i \in \{2, \dots, |S|\}$.

Gebt einen Algorithmus an, der dieses Problem in Zeit $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ löst. Zeigt, dass euer Algorithmus korrekt ist und die gewünschte Laufzeit erzielt.

Präsenzübung 3.4

- a) Wie viele Kanten müssen mindestens hinzugefügt werden, damit der folgende Graph einen Eulerpfad enthält? Wie viele für eine Eulertour? Stellt Eure Lösung graphisch dar.



- b) Ein Weg P in einem gerichteten oder ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt *Hamiltonscher Weg*, wenn P jeden Knoten aus V genau einmal durchläuft. Ist P zusätzlich geschlossen, so nennt man P *Hamiltonkreis*.

Prüft, ob der folgende Graph einen Eulerschen Weg oder eine Eulersche Tour, oder einen Hamiltonschen Pfad oder Kreis enthält und zeichnet gegebenenfalls Eure Lösung.

