Prof. Dr. Daniel Neuen
Jens Schlöter

Wintersemester 2023/2024

Algorithmentheorie

Präsenzübung 5

Präsenzübung 5.1

Ein Unternehmen verkauft sieben Arten von Kisten. Das Volumen dieser Kisten beträgt zwischen 17 und 33 Liter. Die Nachfrage und Größe jeder Kiste könnt ihr unten stehender Tabelle entnehmen.

Box	1	2	3	4	5	6	7
Größe	33	30	26	24	19	18	17
Nachfrage	400	300	500	700	200	400	200

Die veränderlichen Produktionskosten einer Kiste in Euro entspricht ihrem Volumen. Außerdem entstehen Fixkosten in Höhe von 1 000 Euro, sollte sich das Unternehmen entscheiden, eine bestimmte Art von Kiste zu produzieren. Es ist möglich, die Nachfrage nach einer Kiste mit einer Kiste mit einem größeren Volumen zu erfüllen.

(a) Formuliert ein Problem des kürzesten Weges um die Nachfrage mit minimalen Produktionskosten zu erfüllen.

(b) Zeichnet den entsprechenden Graphen.

(c) Löst das Problem mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra.

Präsenzübung 5.2

Ihr arbeitet in der Planung des öffentlichen Nahverkehrs. Vor kurzem wurde eine neue Straße errichtet, die M Kilometer (*ohne Kurven*) von Norden nach Süden führt. Die neue Straße soll nun mit Hilfe von Bushaltestellen an das öffentliche Nahverkehrsnetz angeschlossen werden. Dazu habt ihr bereits die möglichen Positionen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, M]$ ermittelt, an denen Bushaltestellen gebaut werden könnten. Dabei gibt x_i die Position an der Straße an; gemessen in Kilometern ausgehend vom nördlichen Ende der Straße. Für jede mögliche Position x_i habt ihr außerdem den Bedarf b_i für eine Bushaltestelle an der Position ermittelt. Ein hoher Wert b_i bedeutet, dass der Bedarf für eine Haltestelle an Position x_i hoch ist. Damit die Anzahl an Bushaltestellen in den einzelnen Bereichen der Straße nicht zu hoch wird, bekommt Ihr die Vorgabe, dass Bushaltestellen mindestens 3 Kilometer voneinander entfernt sein müssen. Eure Aufgabe ist es, eine Teilmenge der Positionen $x_1, \ldots, x_n$ auszuwählen, so dass ausgewählte Positionen mindestens 3 Kilometer voneinander entfernt sind, und der abgedeckte Bedarf maximiert wird. An diesen Positionen sollen dann Bushaltestellen errichtet werden. Es ist also eine Teilmenge S der Indizes $\{1, \ldots, n\}$ gesucht, die $\sum_{i \in S} b_i$ maximiert, so dass $|x_i - x_j| \geq 3$ für alle $i, j \in S$ mit $i \neq j$.

(a) Gebt ein dynamisches Programm an, welches den maximalen Bedarf berechnet, den eine Teilmenge an Positionen, die jeweils mindestens 3 Kilometer voneinander entfernt sind, abdecken kann. Die Laufzeit des Algorithmus soll dabei polynomiell in n sein. Begründet, warum Euer Algorithmus korrekt ist und die gewünschte Laufzeit erreicht.

(b) Euer Algorithmus aus der ersten Teilaufgabe berechnet nur den maximalen Bedarf, der abgedeckt werden kann. Erklärt, wie aus dem dynamischen Programm in Polynomialzeit eine Lösung berechnet werden kann, die den maximalen Bedarf abdeckt.

Präsenzübung 5.3

Gegeben sei ein Array $A = [a_1, ..., a_n]$ von positiven reellen Zahlen. Entwerft ein dynamisches Programm, welches ein zusammenhängendes Subarray $A[i...j] = [a_i, a_{i+1}, ..., a_j]$ berechnet, sodass das Produkt $a_i \cdot a_{i+1} \cdot ... \cdot a_j$ maximiert wird.