Prof. Dr. Daniel Neuen
Jens Schlöter

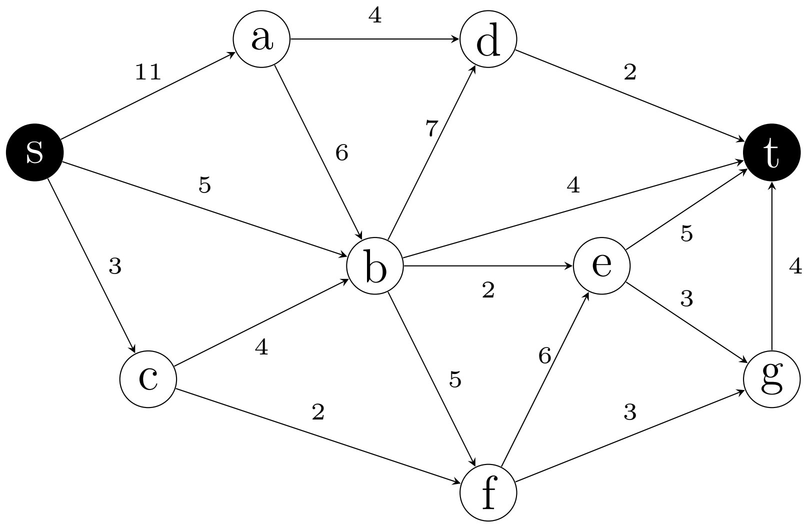
Wintersemester 2023/2024

Algorithmentheorie

Präsenzübung 6

Präsenzübung 6.1

Findet einen maximalen Fluss mithilfe des Ford-Fulkerson-Algorithmus in folgendem Netzwerk. Gebt dabei die verwendeten augmentierenden Wege sowie den aktuellen Fluss nach jeder Erhöhung mit an.



Präsenzübung 6.2

Betrachtet erneut den Algorithmus von Ford-Fulkerson für das Auffinden eines maximalen Flusses in einem gerichteten Netzwerk $N = (V, A, s, t, c)$ wobei $s, t \in V$ und $c(a)$ die Kapazität von Kante a darstellt. Seien $\overleftarrow{A} := \{\overleftarrow{a} : a \in A\}$ die Rückwärtskanten von N und seien die Residualkapazitäten für $a \in \overleftrightarrow{A} := A \cup \overleftarrow{A}$ definiert als

$$\bar{c}_f(a) := \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{falls } a \in A \text{ (Vorwärtskante)} \\ f(a) & \text{falls } a \in \overleftarrow{A} \text{ (Rückwärtskante).} \end{cases}$$

Definiere $A_f := \{a \in \overleftrightarrow{A} : \bar{c}_f(a) > 0\}$ und sei $D_f = (V, A_f)$ der Residualgraph eines zulässigen Flusses f in N. Sei außerdem P ein f-augmentierender $s - t-$Weg in D_f mit Bottleneck-Kapazität $\gamma := \min_{a \in P} \bar{c}_f(a)$.

Zeigt, dass die Erhöhung des Flusses f entlang P um γ einen zulässigen Fluss f' ergibt.

Präsenzübung 6.3

Sei $D = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit ganzzahligen Kapazitäten $c(e)$ für die Kanten $e \in E$. Seien $s, t \in V$ Quelle bzw. Senke in diesem Graphen. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) Sind die Kapazitäten gerade, so existiert ein maximaler s-t-Fluss, sodass $f(e)$ gerade ist für alle Kanten $e \in E$.

(b) Sind die Kapazitäten ungerade, so existiert ein maximaler s-t-Fluss, sodass $f(e)$ ungerade ist für alle Kanten $e \in E$.

(c) Ist s-t-Fluss f maximal, so gilt für jede Kante $e \in E$ entweder $f(e) = 0$ oder $f(e) = c(e)$.

(d) Es existiert ein maximaler s-t-Fluss, mit $f(e) = 0$ oder $f(e) = c(e)$ für jede Kante $e \in E$.

(e) Sind alle Kapazitäten verschieden, so ist der minimale Schnitt eindeutig.

(f) Multiplizieren wir jede Kapazität mit der positiven Zahl $\lambda \in \mathbb{R}^+$, so ist jeder minimale Schnitt im ursprünglichen Graphen auch ein minimaler Schnitt im modifizierten Graphen.

(g) Addieren wir zur Kapazität jeder Kante die positiven Zahl $\lambda \in \mathbb{R}^+$, so ist jeder minimale Schnitt im ursprünglichen Graphen auch ein minimaler Schnitt im modifizierten Graphen.