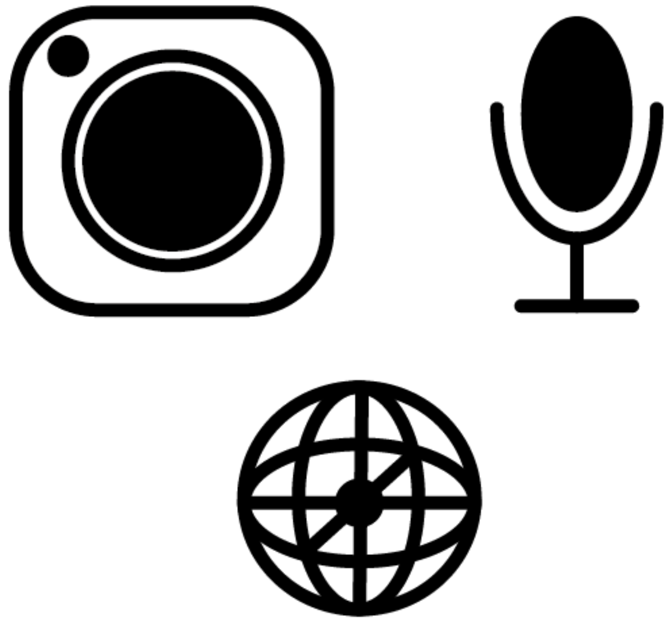


Sensordatenverarbeitung

KOORDINATENSYSTEME (5A)

(11.-15.11.24)

Universität Bremen

Zeitplan

Nr.	Thema
1	Einleitung; einführende Beispiele
2	Datenaufnahme; Audio-Datenaufnahme
3	Bild-Datenaufnahme
4	Farbe, Segmentierung, Segmentierungsgetriebene BV
5	Koordinatensysteme; Bewegungs-Datenaufnahme
6	Audiosignal, 1D Frequenzraum, Fouriertransformation
7	2D Frequenzraum, 2D Filter
8	Kanten, SdV-Paradigmen, direkte Bildmerkmale
9	Houghtransformation, Bewegungsmerkmale
10	Audiomerkmale
11	Klassifizierungsalgorithmen
12	Entwicklung und Evaluation sensorbasierter Systeme
13	Bayes-Schätzung & Bayes-Filter

Was ist Bewegung?

- „[...] Änderung des Ortes eines Massenpunktes oder physikalischen Körpers mit der Zeit.“, Wikipedia/Bewegung(Physik), 29.10.19
  - → Welche Punkte des Körpers sind wann wo?

- Hier *Starrkörper*: Idealisierte Modellvorstellung eines unverformbaren Körpers, bei dem Abstände und Winkel zwischen Punkten innerhalb des Körpers konstant bleiben.

- Frage 1: Wie beschreibt man die Bewegung eines Starrkörpers?
- Frage 2: Was misst ein Inertialsensor?
- Frage 3: Wie hängen beide Sachen zusammen?

Was ist Bewegung?

Wo ist das Flugzeug?

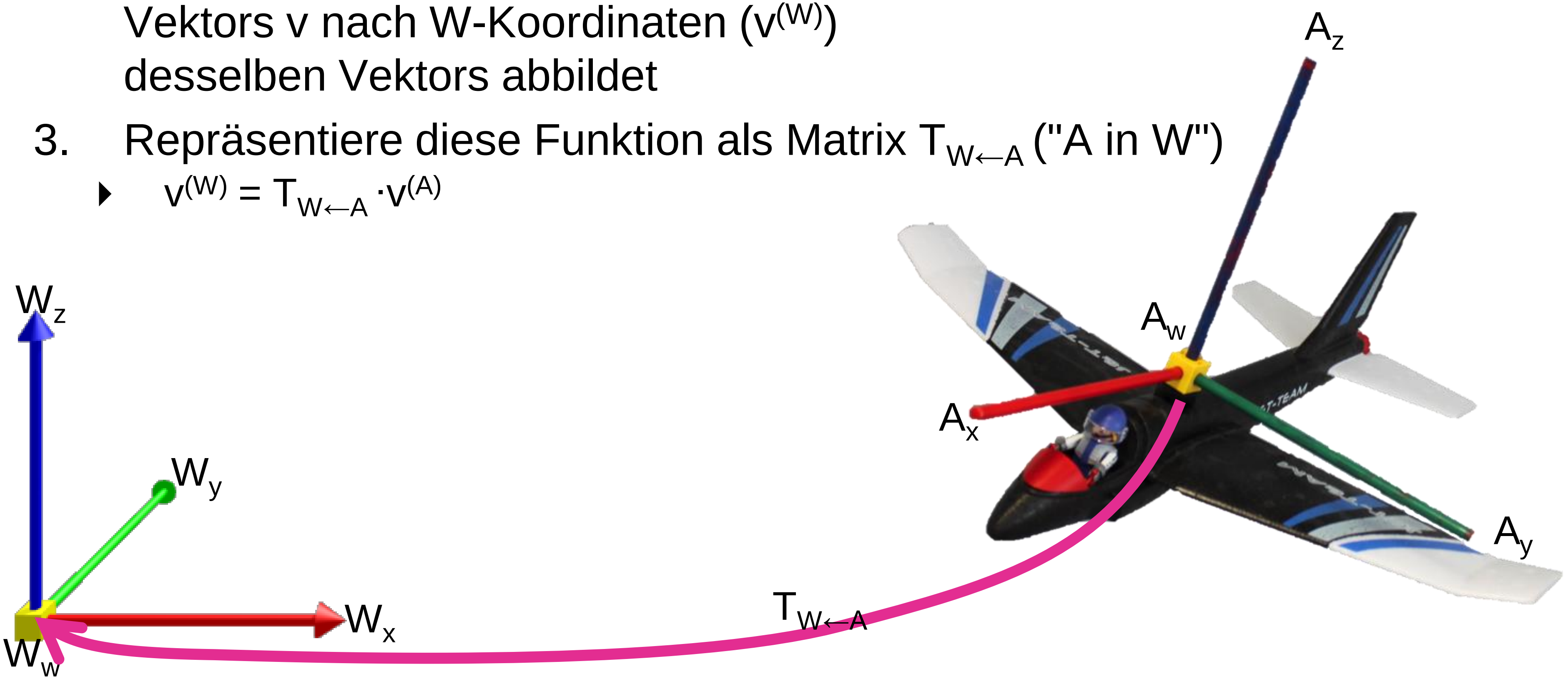
Was ist Bewegung?

- Wo ist das Flugzeug?
- Position (einfach)
- Orientierung (schwierig)
- Position + Orientierung = *Pose*
- Position aller Punkte eines Objektes = Pose

Repräsentation einer Pose

Drei gedankliche Schritte, eine geometrische Pose zu repräsentieren

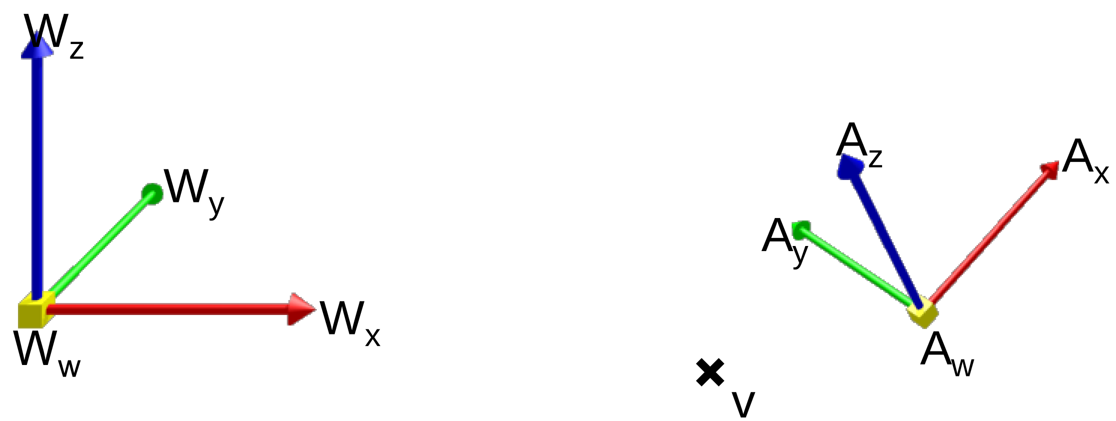
1. Befestige Koordinatensystem (Frame) an Objekt und Welt
   - Flugzeug-Frame (A) und Welt-Frame (W)
2. Betrachte Funktion, die A-Koordinaten ($v^{(A)}$) eines Vektors v nach W-Koordinaten ($v^{(W)}$) desselben Vektors abbildet
3. Repräsentiere diese Funktion als Matrix $T_{W \leftarrow A}$ ("A in W")
   - $v^{(W)} = T_{W \leftarrow A} \cdot v^{(A)}$



1. Koordinatensysteme

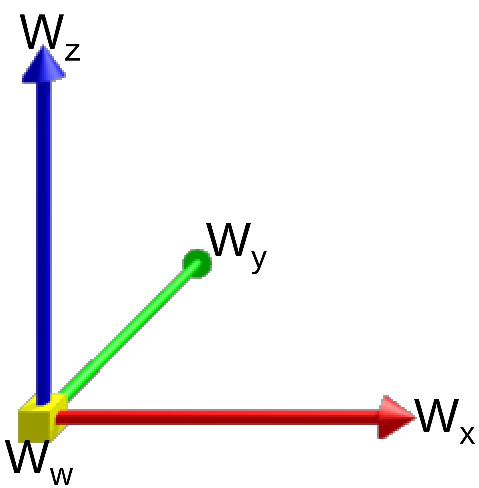
2. Abbildung A- auf W-Koordinaten

- Frame A definiert eine Abbildung zwischen geometrischen Vektoren und vier Koordinaten im Computer: $v \leftrightarrow v^{(A)}$, $v \leftrightarrow v^{(W)}$
- $v^{(A)} = (v^{(A)}{}_x, v^{(A)}{}_y, v^{(A)}{}_z, v^{(A)}{}_w)$: der geometrische Vektor v repräsentiert in A-Koordinaten
- $v^{(W)} = (v^{(W)}{}_x, v^{(W)}{}_y, v^{(W)}{}_z, v^{(W)}{}_w)$: derselbe geometrischer Vektor v repräsentiert in W-Koordinaten
- Bsp.: $v^{(A)} = (-1,0.6,0,1) \Rightarrow v = -1*A_x + 0.6*A_y + 0*A_z + 1*A_w$
- Bsp.: $v^{(W)} = (2,1,-1,1) \Rightarrow v = 2*W_x + 1*W_y + -1*W_z + 1*W_w$

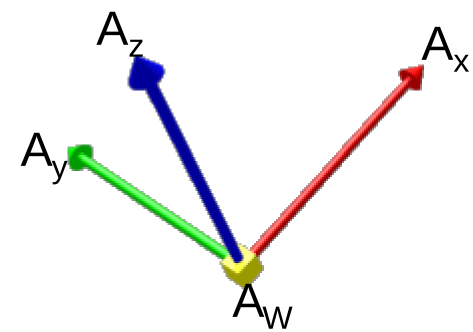


2. Abbildung A- auf W-Koord.

- Wie lauten die folgenden Koordinaten?

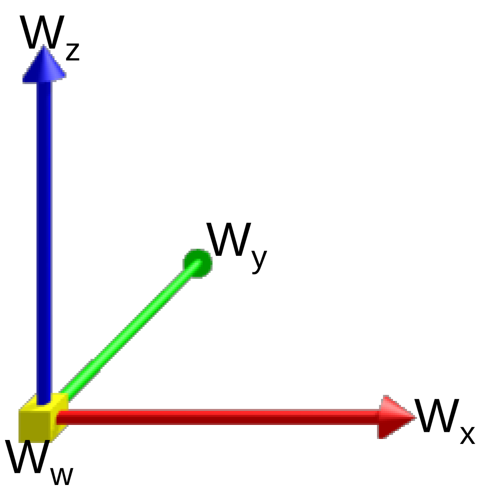


$$A_x^{(A)} \begin{pmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{pmatrix} \quad A_y^{(A)} \begin{pmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{pmatrix} \quad A_z^{(A)} \begin{pmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{pmatrix} \quad A_w^{(A)} \begin{pmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{pmatrix}$$

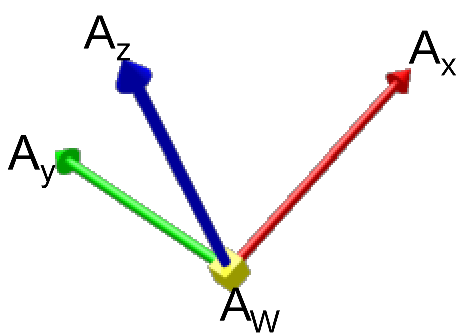


2. Abbildung A- auf W-Koord.

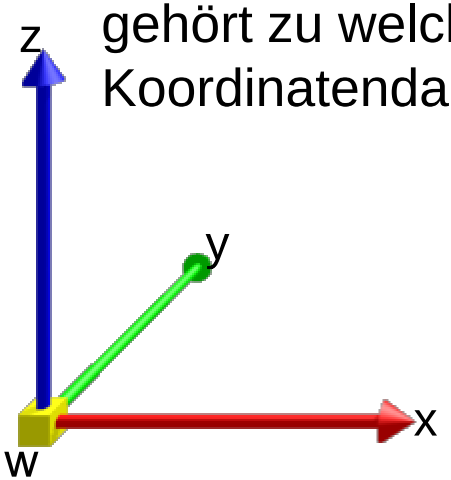
- Wie lauten die folgenden Koordinaten?



$$A_x^{(A)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad A_y^{(A)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad A_z^{(A)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad A_w^{(A)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

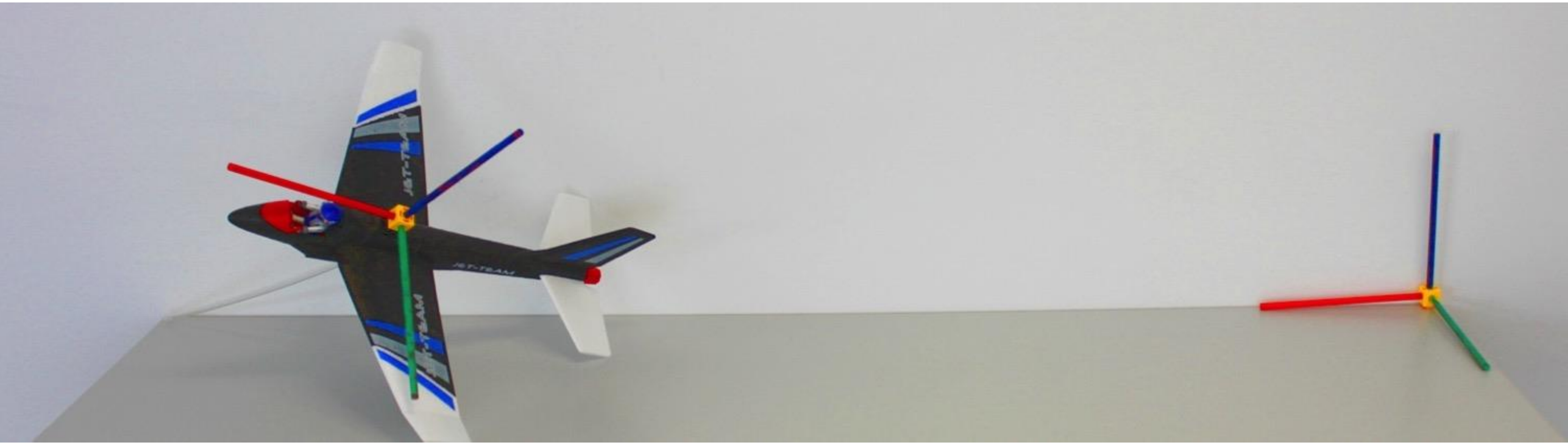


- Welches Koordinatentupel gehört zu welcher Koordinatendarstellung?

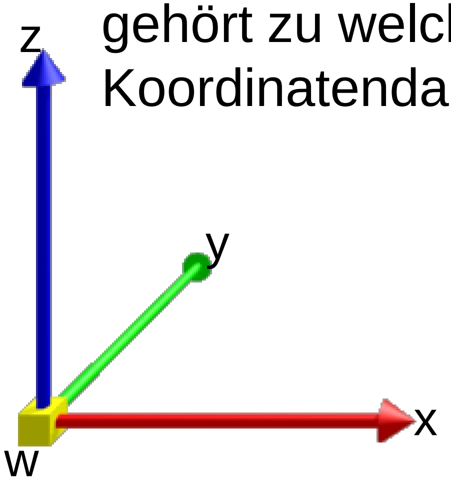


$$A_x^{(W)} \qquad A_y^{(W)} \qquad A_z^{(W)} \qquad A_w^{(W)}$$

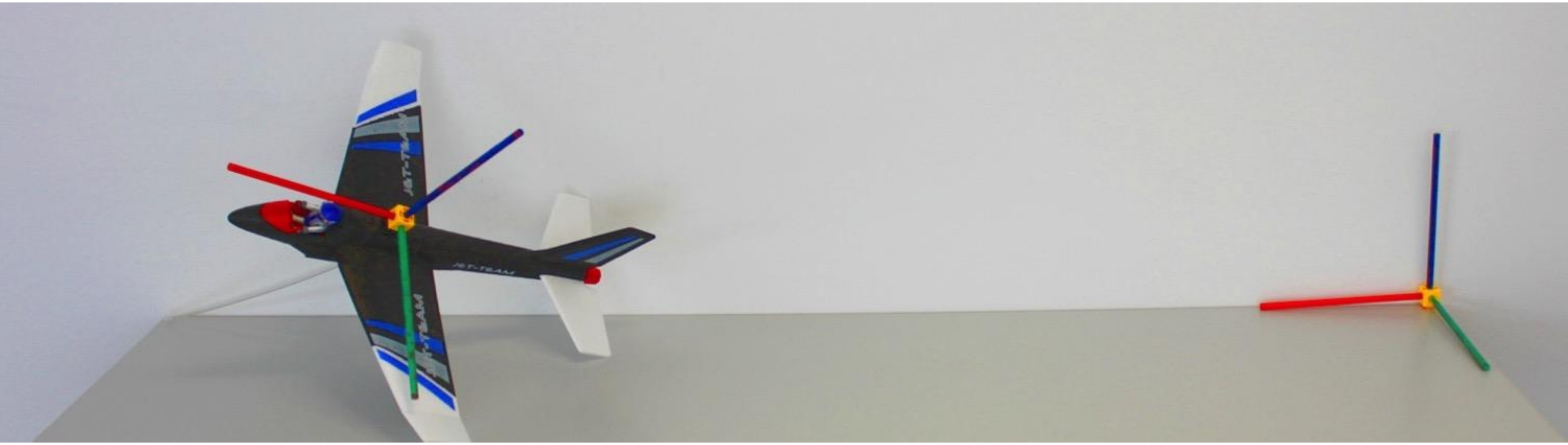
$$\begin{pmatrix} -0.7 \\ +0.3 \\ +0.6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1.2m \\ 0.2m \\ 0.2m \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} +0.7 \\ +0.6 \\ +0.4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -0.3 \\ +0.7 \\ -0.7 \\ 0 \end{pmatrix}$$



- Welches Koordinatentupel gehört zu welcher Koordinatendarstellung?



$$
\begin{array}{cccc}
A_x^{(W)} & A_y^{(W)} & A_z^{(W)} & A_w^{(W)} \\
\begin{pmatrix} -0.7 \\ +0.3 \\ +0.6 \\ 0 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 1.2m \\ 0.2m \\ 0.2m \\ 1 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} +0.7 \\ +0.6 \\ +0.4 \\ 0 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} -0.3 \\ +0.7 \\ -0.7 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



2. Abbildung A- auf W-Koord.

- Seien A und B zwei Koordinatensysteme
- Abbildungskette: $v^{(A)} \leftrightarrow v \leftrightarrow v^{(B)}$
- definiert Abbildung: $v^{(A)} \leftrightarrow v^{(B)}$
  – Umrechnung eines Orts-/Richtungsvektors v von A- nach B-Koordinaten
- diese Abbildung legt implizit die Pose von A relativ zu B fest

3. Repräsentiere als Matrix

- Ansatz: Beschreibe $v^{(A)} \to v^{(B)}$ als Multiplikation mit einer Matrix
- Für die gesuchte Matrix $T_{B\leftarrow A}$ muss gelten: $v^{(B)} = T_{B\leftarrow A} \cdot v^{(A)}$
- $A_x^{(B)} = T_{B\leftarrow A}\, A_x^{(A)} = T_{B\leftarrow A}\, e_x = (T_{B\leftarrow A})_{\bullet x}$
- $A_y^{(B)} = T_{B\leftarrow A}\, A_y^{(A)} = T_{B\leftarrow A}\, e_y = (T_{B\leftarrow A})_{\bullet y}$
- $A_z^{(B)} = T_{B\leftarrow A}\, A_z^{(A)} = T_{B\leftarrow A}\, e_z = (T_{B\leftarrow A})_{\bullet z}$
- $A_w^{(B)} = T_{B\leftarrow A}\, A_w^{(A)} = T_{B\leftarrow A}\, e_w = (T_{B\leftarrow A})_{\bullet w}$

3. Repräsentiere als Matrix

- Ansatz: Beschreibe $v^{(A)} \rightarrow v^{(B)}$ als Multiplikation mit einer Matrix
- Für die gesuchte Matrix $T_{B\leftarrow A}$ muss gelten: $v^{(B)} = T_{B\leftarrow A} \cdot v^{(A)}$
- $A_x^{(B)} = T_{B\leftarrow A}\, A_x^{(A)} = T_{B\leftarrow A}\, e_x = (T_{B\leftarrow A})_{\bullet x}$
- $A_y^{(B)} = T_{B\leftarrow A}\, A_y^{(A)} = T_{B\leftarrow A}\, e_y = (T_{B\leftarrow A})_{\bullet y}$
- $A_z^{(B)} = T_{B\leftarrow A}\, A_z^{(A)} = T_{B\leftarrow A}\, e_z = (T_{B\leftarrow A})_{\bullet z}$
- $A_w^{(B)} = T_{B\leftarrow A}\, A_w^{(A)} = T_{B\leftarrow A}\, e_w = (T_{B\leftarrow A})_{\bullet w}$

Satz: Setzt man $T_{B\leftarrow A} = [A_x^{(B)}, A_y^{(B)}, A_z^{(B)}, A_w^{(B)}]$, so gilt für alle Vektoren v, dass $v^{(B)} = T_{B\leftarrow A} \cdot v^{(A)}$

AG MSIS

CSL Cognitive Systems Lab

$T_{B\leftarrow A}$: Achsen von A (Spalten)...

$$\begin{array}{cccc} A_x & A_y & A_z & A_w \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} B_x \\ B_y \\ B_z \\ B_w \end{array} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v^{(B)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{B\leftarrow A}} \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v^{(A)}}$$

$T_{B\leftarrow A}$: Achsen von A (Spalten) dargestellt in B-Koordinaten (Zeilen)

$$\begin{array}{cccc} A_x & A_y & A_z & A_w \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} B_x \\ B_y \\ B_z \\ B_w \end{array} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v^{(B)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{B\leftarrow A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v^{(A)}}$$

3. Repräsentiere als Matrix

$T_{B\leftarrow A}$: Achsen von A (Spalten) dargestellt in B-Koordinaten (Zeilen)

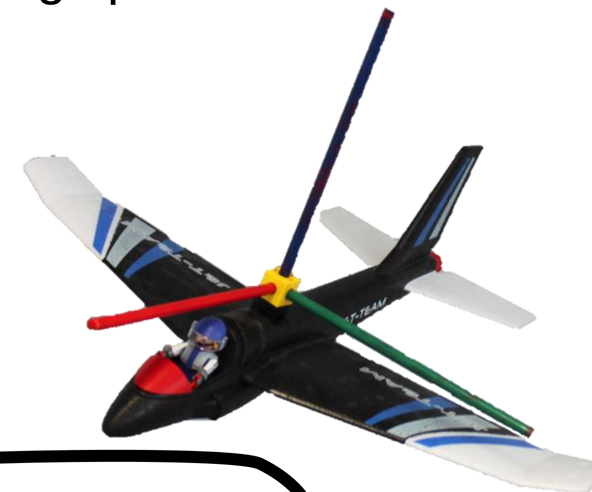
Merken!

$$\begin{array}{ccccc} & A_x & A_y & A_z & A_w \\ & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

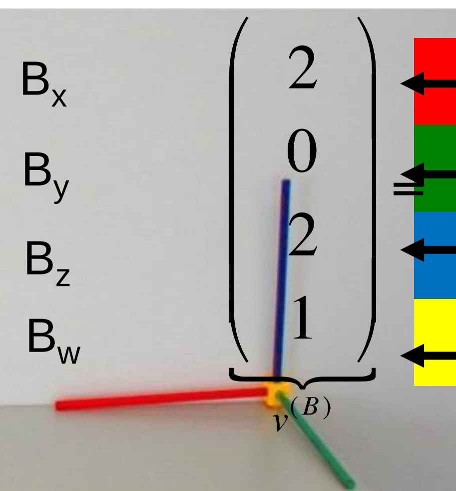
$$\begin{array}{c} B_x \\ B_y \\ B_z \\ B_w \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v^{(B)}} \triangleq \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{B\leftarrow A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v^{(A)}}$$

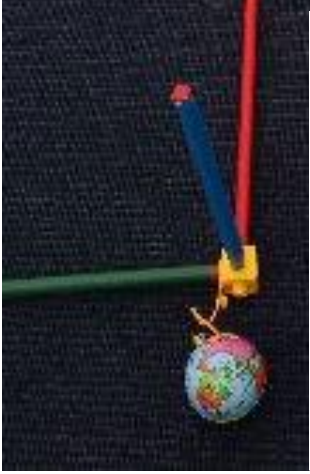
3. Repräsentiere als Matrix

- Frage an das Auditorium: Welche Lage des Flugzeugs passt zu dieser Matrix?



$$\begin{array}{c} \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ B_w \end{array}
\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}}_{v^{(B)}}
=
\begin{array}{cccc} A_x & A_y & A_z & A_w \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}
\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0&2\\1&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{T_{B\leftarrow A}}
\cdot
\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}}_{v^{(A)}}$$





$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} B_x \\ B_y \\ B_z \\ B_w \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v^{(B)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{B\leftarrow A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v^{(A)}}$$

Struktur der Matrix

- Struktur der Matrix $T_{B\leftarrow A}$
- Achsen von A (Spalten) dargestellt in B-Koordinaten (Zeilen)
- Orientierung als 3×3-Matrix R und Position als 3-Vektor t

Orientierung $R_{B\leftarrow A}$

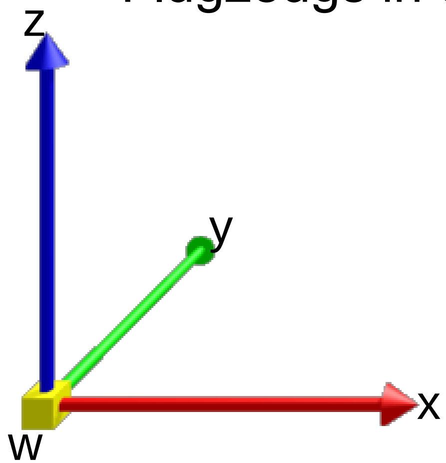
Position $t_{B\leftarrow A}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A_X & A_Y & A_Z & A_W \end{array} \\ \begin{array}{c} B_X \\ B_Y \\ B_Z \\ B_W \end{array} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{B\leftarrow A}} \end{array}$$

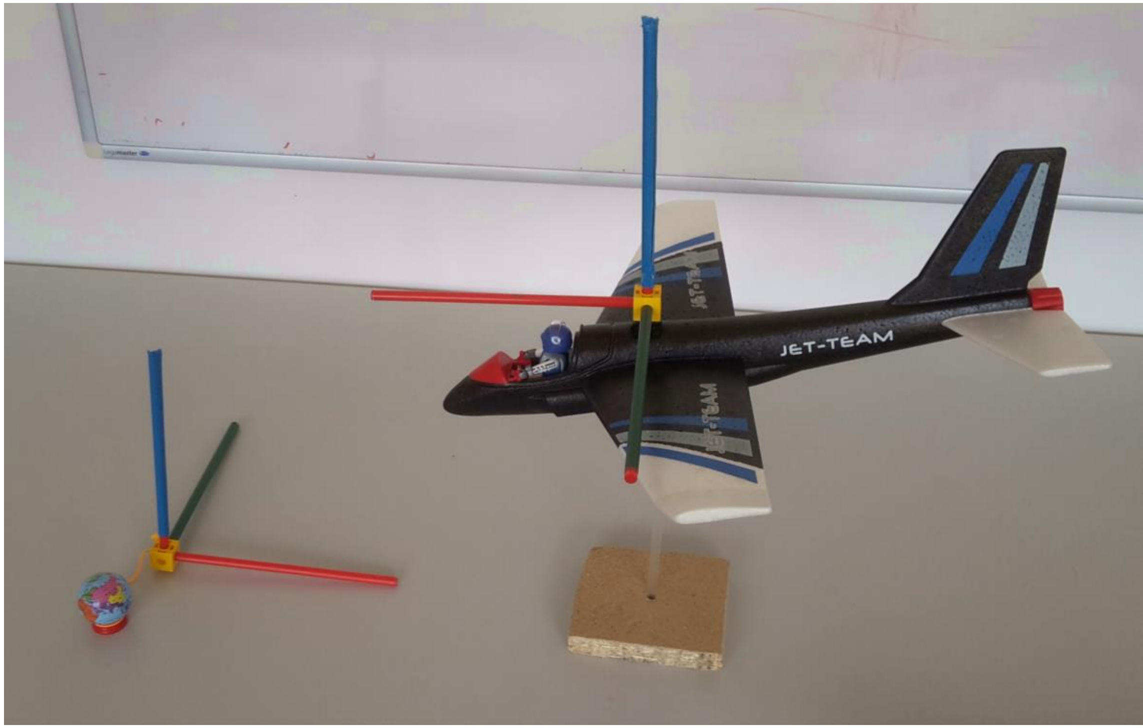
fest

Übung

- Welche Transformationsmatrix $T_{W \leftarrow A}$ beschreibt diese Pose des Flugzeugs in der Welt?

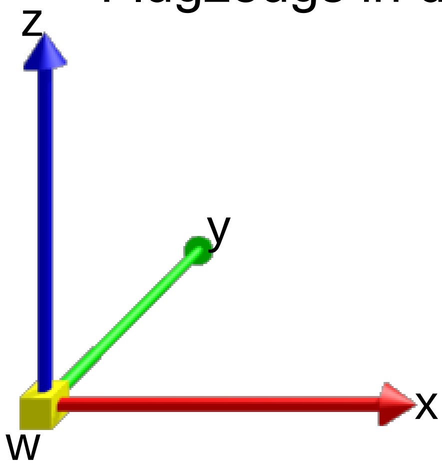


$$T_{W \leftarrow A} = \begin{pmatrix} \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \end{pmatrix}$$

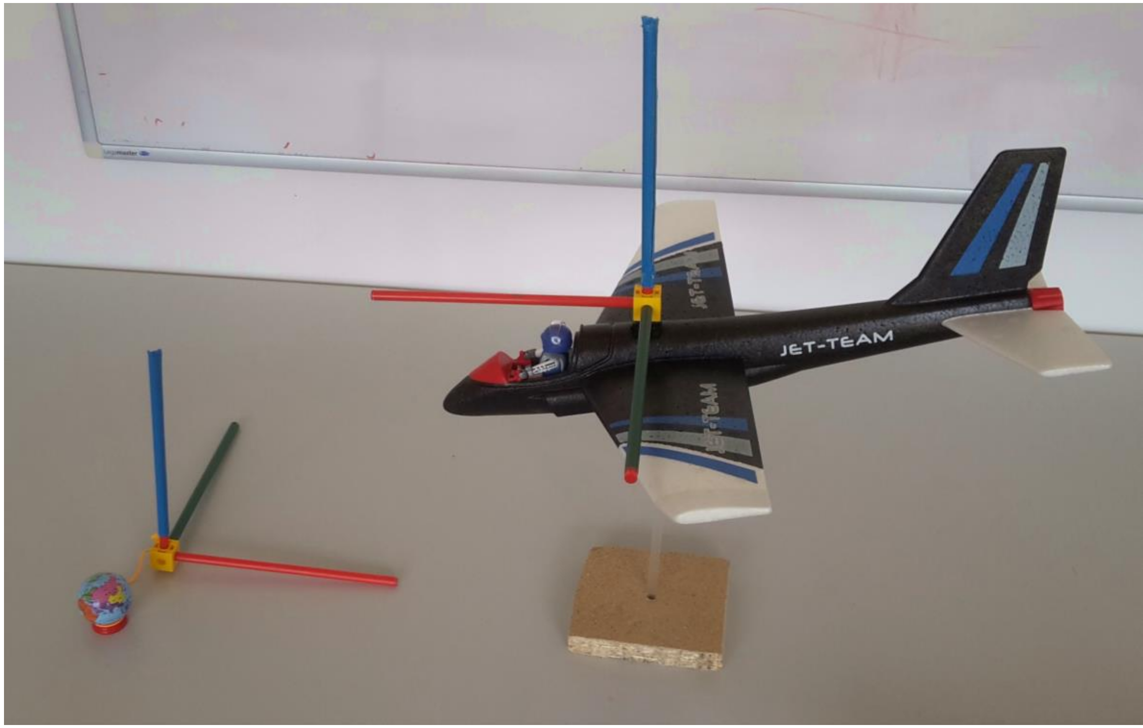


Übung

- Welche Transformationsmatrix $T_{W \leftarrow A}$ beschreibt diese Pose des Flugzeugs in der Welt?

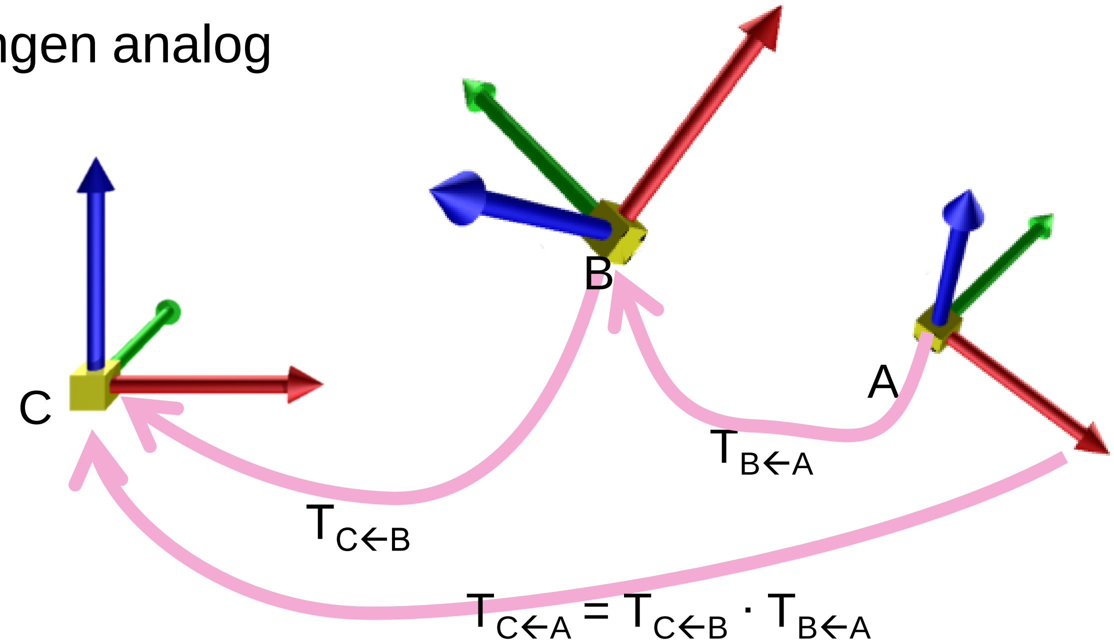


$$T_{W \leftarrow A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.4m \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



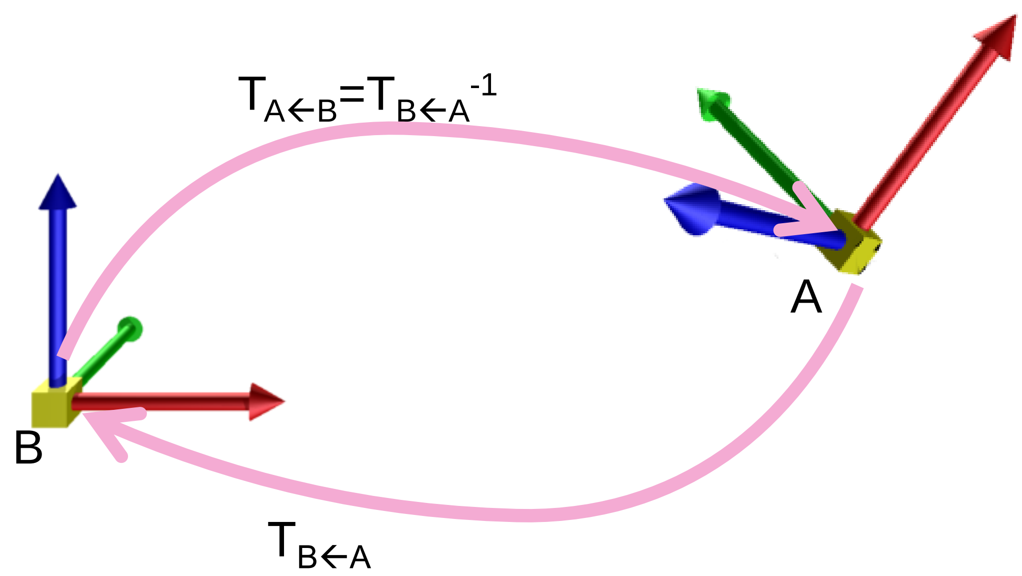
Operationen auf Transform.

- Seien A, B, C drei Koordinatensysteme
- Hintereinanderausführung (Verkettung)
  - $T_{C \leftarrow A} = T_{C \leftarrow B} \cdot T_{B \leftarrow A}$
  - $(T_{C \leftarrow B} \cdot T_{B \leftarrow A}) \cdot v^{(A)} = T_{C \leftarrow B} \cdot T_{B \leftarrow A} \cdot v^{(A)} = T_{C \leftarrow B} \cdot v^{(B)} = v^{(C)}$
  - Konsistenzcheck durch Lesen von rechts nach links
  - Ausgang der rechten Transformation ("B") ist Eingang der linken
- Rechnen mit Orientierungen analog



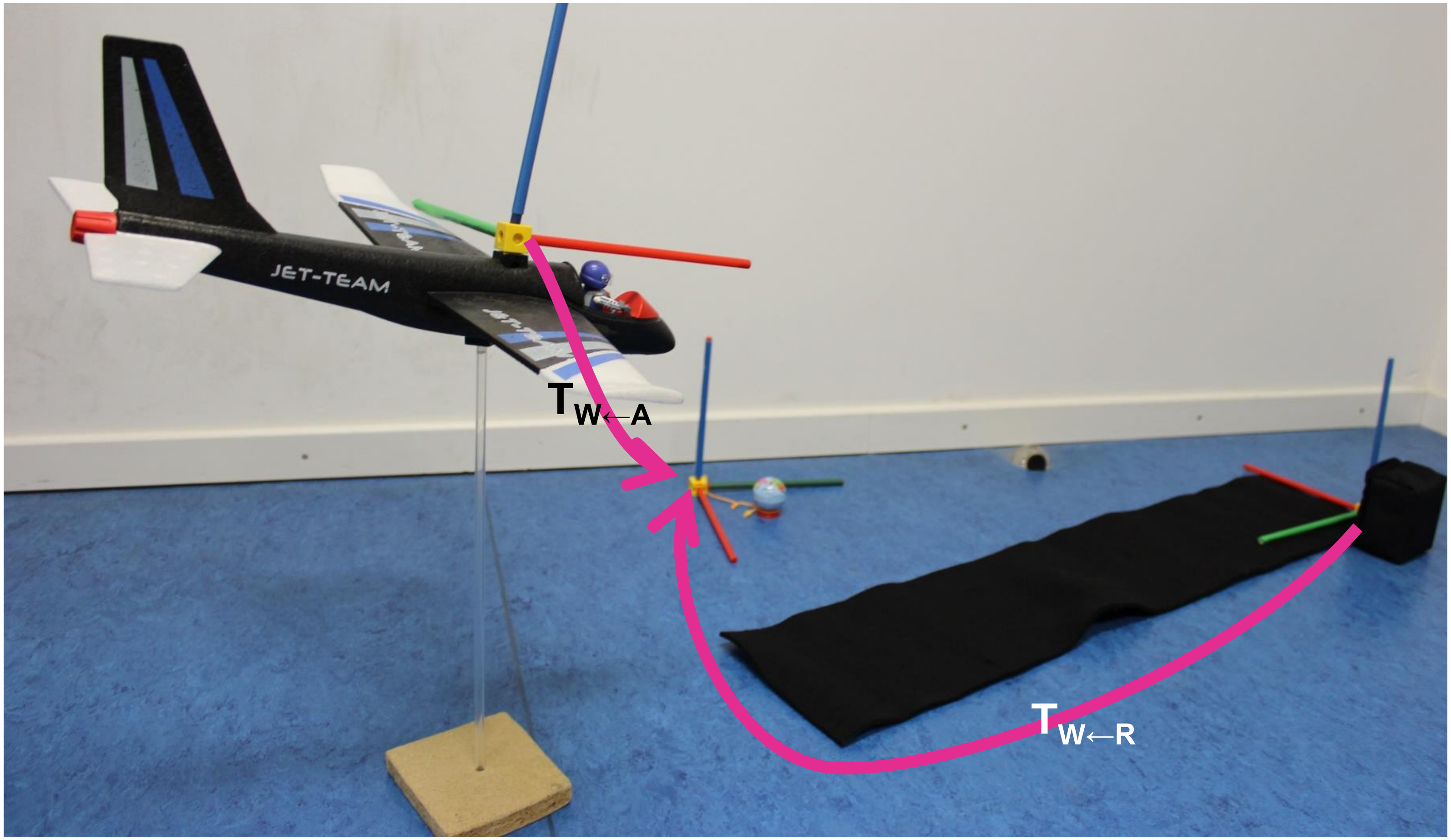
Umkehrung von Transformationen

- Seien A, B zwei Koordinatensysteme
- Inverse
  - $T_{B \leftarrow A} = (T_{A \leftarrow B})^{-1}$
  - $v^{(A)} = T_{A \leftarrow B} \cdot v^{(B)} \Leftrightarrow v^{(B)} = (T_{A \leftarrow B})^{-1} \cdot v^{(A)}$
  - $T_{A \leftarrow B}$ ist stets invertierbar
- Rechnen mit Orientierungen analog



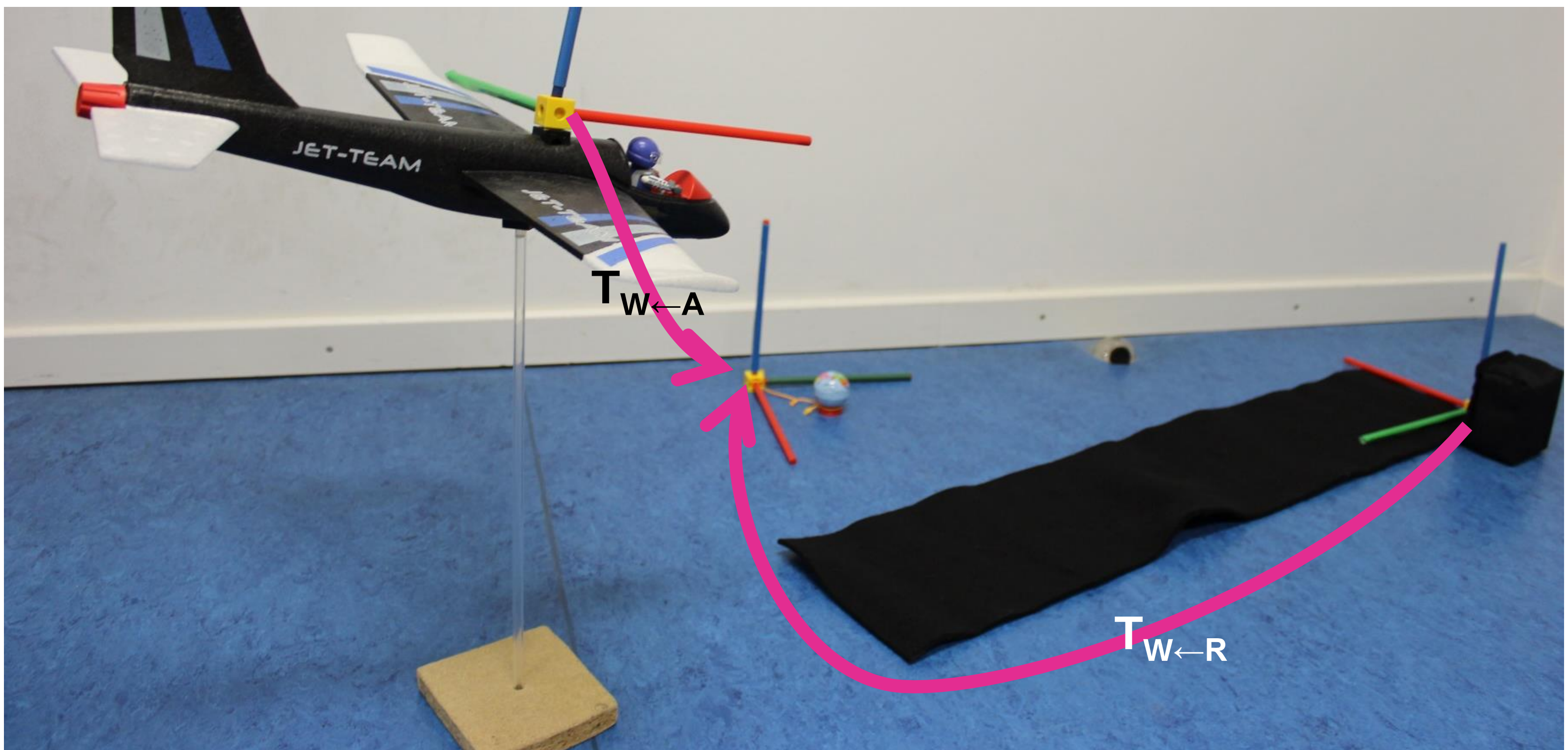
Bsp: Flugzeug und Landebahn

- Wir haben „airplane in world“ ($T_{W\leftarrow A}$) und „runway in world“ ($T_{W\leftarrow R}$). Wie berechnen wir "airplane in runway" ($T_{R\leftarrow A}$)?
  - **Erinnerung: $T_{B\leftarrow A} = (T_{A\leftarrow B})^{-1}$,**
  - **$T_{C\leftarrow A} = T_{C\leftarrow B} \cdot T_{B\leftarrow A}$**



Bsp: Flugzeug und Landebahn

- Wir haben „airplane in world“ ($T_{W\leftarrow A}$) und „runway in world“ ($T_{W\leftarrow R}$). Wie berechnen wir "airplane in runway" ($T_{R\leftarrow A}$)?
  - **Erinnerung: $T_{B\leftarrow A} = (T_{A\leftarrow B})^{-1}$,**
  - **$T_{C\leftarrow A} = T_{C\leftarrow B} \cdot T_{B\leftarrow A}$**
  - **Achtung: 8 Kombinationen, 7 falsch!**
  - **$T_{R\leftarrow A} = (T_{W\leftarrow R})^{-1} \cdot T_{W\leftarrow A}$**



Rodriguez-Formel

- Rot(v): Rotation um die Achse v und den Winkel |v| als 3×3 Matrix
  - Hier nur Orientierung, für Pose 4. Spalte / Zeile (0,0,0,1) ergänzen
- Benötigt für Beschreibung allgemeiner Drehbewegungen
- Formel muss nicht auswendig gelernt werden
- Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix

$$\operatorname{Rot}(v) = \begin{pmatrix} (1-c)x^2+c & (1-c)xy-sz & (1-c)xz+sy \\ (1-c)xy+sz & (1-c)y^2+c & (1-c)yz-sx \\ (1-c)xz-sy & (1-c)yz+sx & (1-c)z^2+c \end{pmatrix},$$

$$\text{mit} \quad c = \cos|v|, \quad s = \sin|v|, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{v}{|v|}$$

Zusammenfassung

- Transformation zwischen Koordinatensystemen für Lage von Körpern
  - $\mathbf{T}_{\mathbf{B}\leftarrow\mathbf{A}}$ (sprich „A in B“) transformiert von A nach B Koordinaten
  - Spalten von $\mathbf{T}_{\mathbf{B}\leftarrow\mathbf{A}}$ sind die Achsen von A dargestellt in B-Koordinaten
  - Verkettung durch Multiplikation: $\mathbf{T}_{\mathbf{C}\leftarrow\mathbf{A}} = \mathbf{T}_{\mathbf{C}\leftarrow\mathbf{B}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{B}\leftarrow\mathbf{A}}$
  - Umdrehen durch Inverses: $\mathbf{T}_{\mathbf{B}\leftarrow\mathbf{A}} = (\mathbf{T}_{\mathbf{A}\leftarrow\mathbf{B}})^{-1}$

Bildquellen

- Flugzeug, © Microsoft, MS Flightsimulator 2020, §60
- Alle weiteren Grafiken und Fotografien selbst erstellt