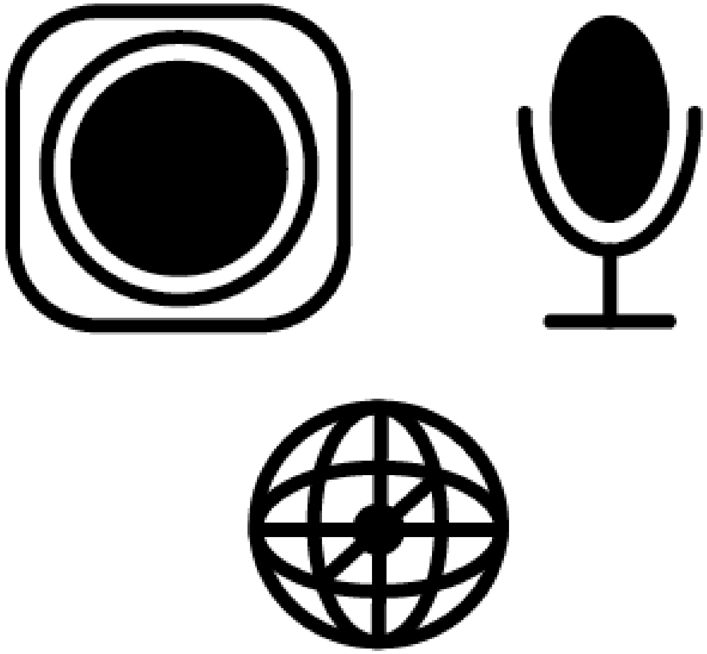


Sensordatenverarbeitung

1D-FREQUENZRAUM (6B)

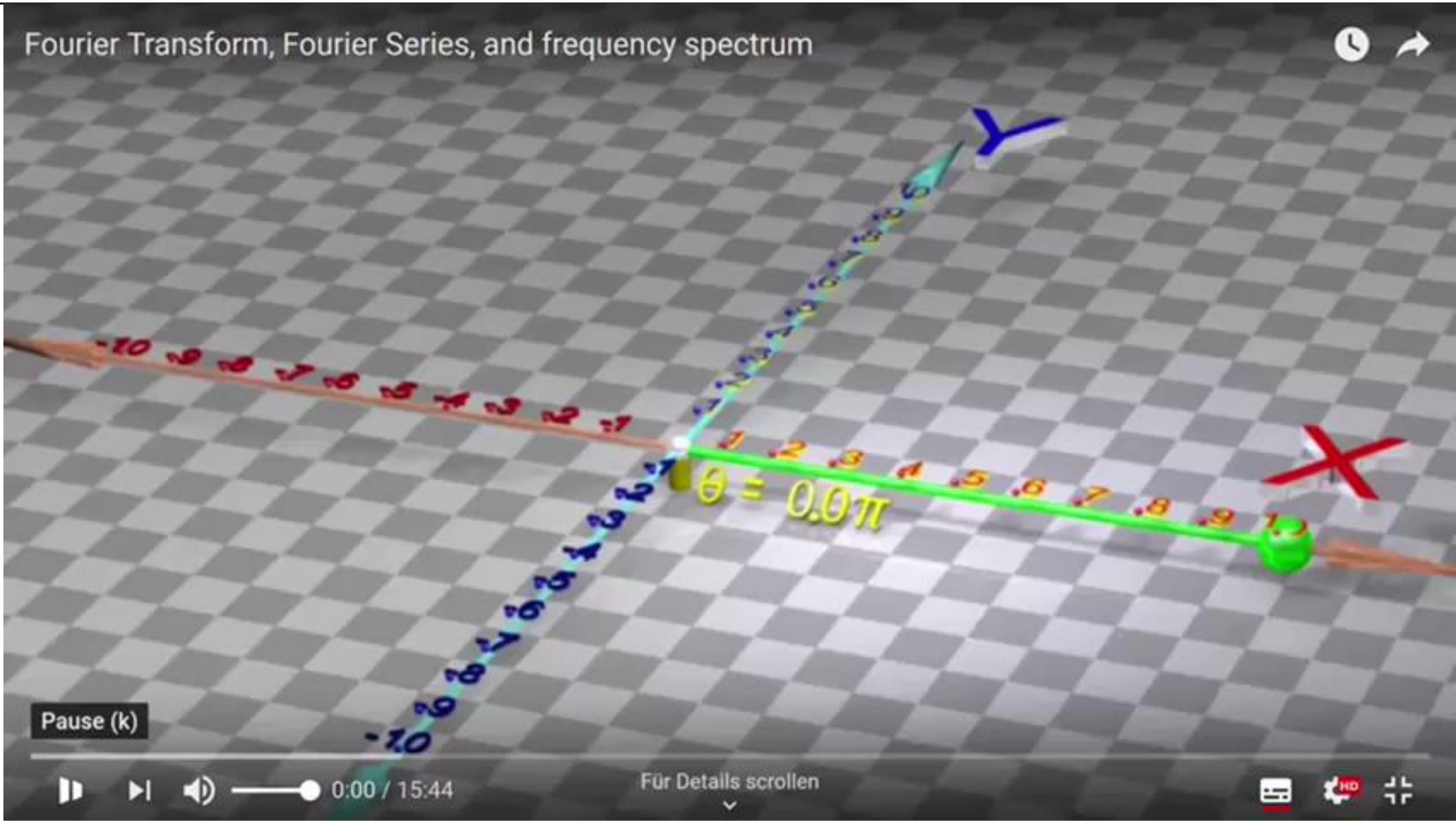
18.-22.11.2024

Teil b

Frequenzanteile?

- Im folgenden lernen wir eine Transformation kennen, die (Audio-)signale in ihre Frequenzanteile zerlegt

Vom Zeit- in den Frequenzbereich



https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM

Fourier-Analyse

- Joseph Fourier beschrieb (1822), wie sich jede auf einem endlichen Intervall periodische Funktion f aus periodischen harmonischen Schwingungen (sin, cos) verschiedener Phasen, Amplituden und Frequenzen zusammensetzen lässt:
  Fourier-Reihen: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
  hier im Video: periodische Funktion mit diskreten Spektralkomponenten

- In der allgemeinen Form (nächste Folien) als **Fourier-Analyse** bezeichnet

- Die Fourier-Analyse ist in vielen Technik- und Wissenschaftszweigen von großer praktischer Bedeutung
- In der Akustik verwendet man sie zur **Frequenz-Transformation des Schalls in Oberschwingungen**

https://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Analysis

Fourier-Transformation (FT)

- Bei Verallgemeinerung auf beliebige Funktionen spricht man von einer Fourier-Transformation (FT)
- Die FT liefert ein **Frequenzspektrum**
- Der Bezug zwischen dem Zeitbereich mit der Originalfunktion $x(t)$ und dem Frequenzbereich mit der Bildfunktion $X(j\omega)$ wird wie folgt geschrieben:

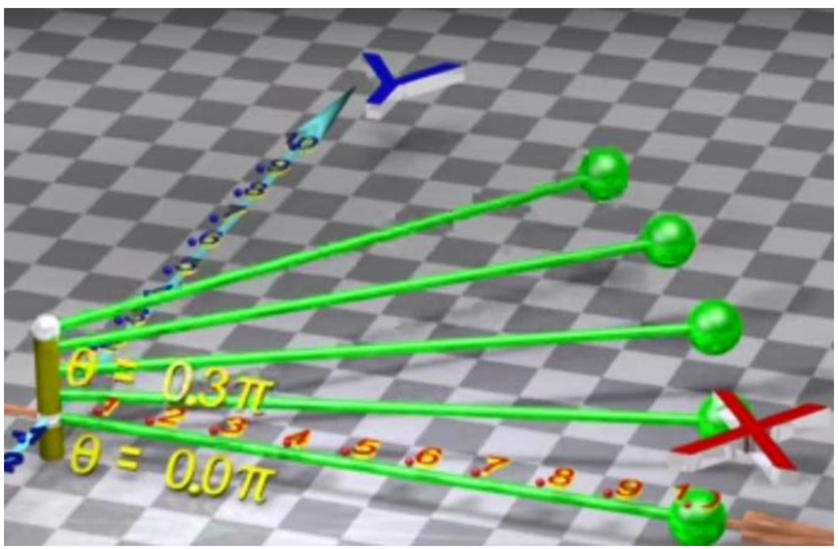
$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(j\omega)$$

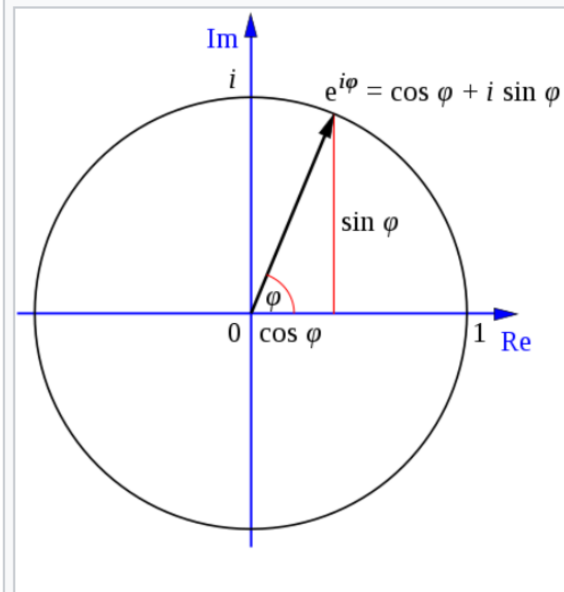
- Je nach Eigenschaften der Funktion x(t) existieren vier Varianten der FT

Variante	Definitionsmenge von x	Periodizität von x	Frequenzspektrum
Fourier-Reihe	kontinuierliches Intervall	periodisch	diskret
Kontinuierliche Fourier-Transformation	kontinuierlich	aperiodisch	kontinuierlich
Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	diskret, endlich	aperiodisch, periodisch fortgesetzt	diskret, endlich
Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale (DTFT)	diskret, endlich	aperiodisch	kontinuierlich

Komplexe Darstellung

- Mit Eulersche Formel: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)$
- x-Achse $\cos$ ist definiert als der Realteil (Re) und die y-Achse sin als der Imaginärteil (Im) der komplexen Zahlenebene
- e ist die Eulersche Zahl (Basis der natürlichen Exponentialfunktion) und i die imaginäre Einheit
- Komplexe Zahl in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$





Veranschaulichung am Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene

Formulierung FT

- Sei $x(t)$ eine Funktion im Zeitbereich
- Die Fourier Transformation ist definiert als:

$$X(\omega) = F(x)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

- Diese Transformation zerlegt das Zeitsignal in Komponenten der komplexen Oszillation $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \; \sin \omega t$

- Das resultierende Spektrum $X(\omega)$ kann man interpretieren als die **Anteile der Frequenz $\boldsymbol{\omega}$ am Signal $\boldsymbol{x(t)}$**

- Das Resultat der Fourier Transformation ist eine komplexe Zahl $z = re^{i\varphi}$

Inverse FT

- Sei $X(\omega)$ ein Signal im Frequenzbereich
- Dann ist die **Inverse Fourier Transformation** definiert als

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

- Die Existenz dieser inversen Transformation bedeutet, dass durch die Transformation keine Information verloren geht.

- Die wichtigsten Eigenschaften der FT:
  - Linearität: $F(x)(t) + F(y)(t) = F(x+y)(t)$ und $a \cdot F(x)(t) = F(a \cdot x)(t)$
  - Zeitverschiebung: $F(x)(t-T) = e^{-i\omega T} F(x)(t)$
  - Frequenzverschiebung: $F\left(e^{-i\omega_0 t} \cdot x\right)(t) = X(\omega - \omega_0)$

- Die Transformation ist eine komplexe Funktion

Spektrum

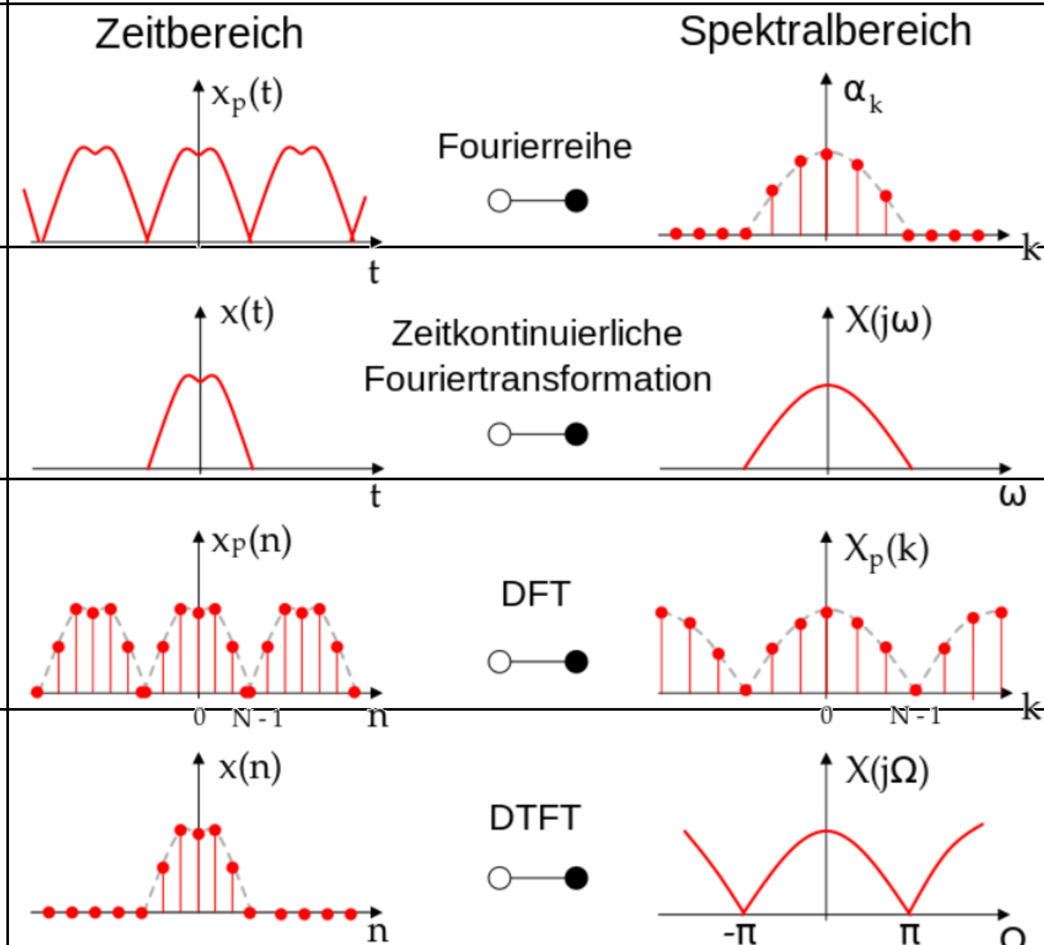
- Die Fourier Transformation erzeugt ein *Spektrum*

$X(\omega)$	Spektrum
$\|X(\omega)\|$	Amplitudenspektrum
$\varphi(\omega)$	Phasenspektrum
$\|X(\omega)\|^2$	Leistungsspektrum

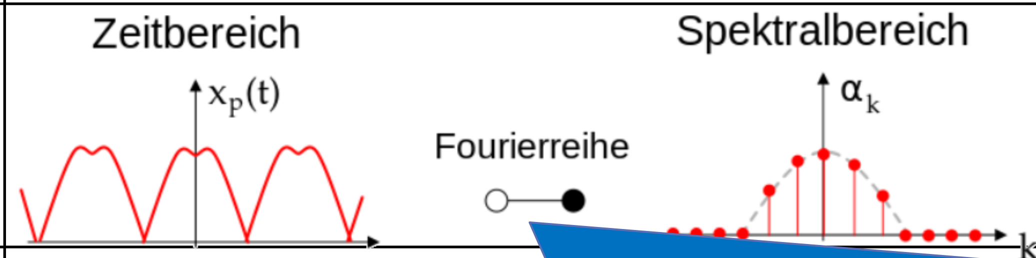
- Oft wird der Ausdruck *Spektrum* für das Leistungsspektrum verwendet
- Oft wird das Phasenspektrum ignoriert, bspw. in der Spracherkennung

Varianten der FT

Definitionsmenge x	Periodizität von x		Frequenz-spektrum
Kontinuierliches Intervall	periodisch		diskret
Kontinuierlich	aperiodisch		kontinuierlich
diskret, endlich	Aperiodisch, periodisch fortgesetzt		Diskret, endlich
Diskret, endlich	aperiodisch		kontinuierlich



Varianten der FT

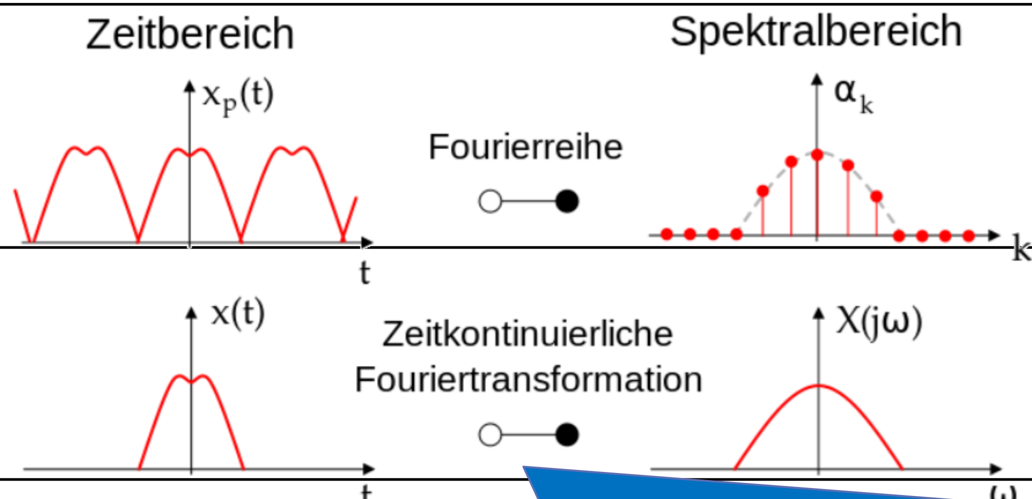
Definitions menge x	Periodizität von x		Frequenz-spektrum
Kontinuier-liches Intervall	periodisch		diskret

Eine in einem endlichen Intervall periodische fortgesetzte Funktion kann in eine **Fourier-Reihe** zerlegt werden.

Das Spektrum ist somit diskret.

Varianten der FT

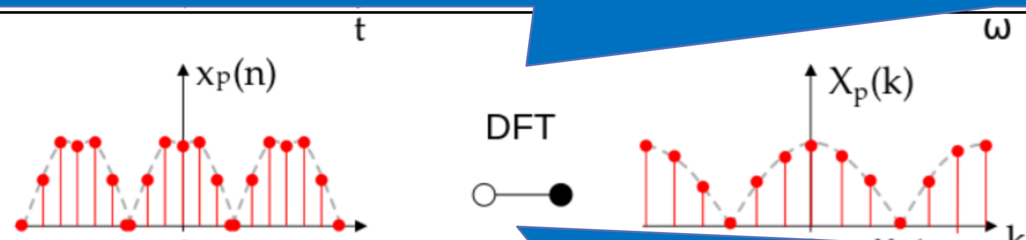
Definitionsmenge x	Periodizität von x		Frequenzspektrum
Kontinuierliches Intervall	periodisch		diskret
Kontinuierlich	aperiodisch		kontinuierlich



Ein Vorgang, der unperiodisch bis ins Unendliche reicht, erfordert die **kontinuierliche Fourier-Transformation** (auch Fourier-Integral).

Dabei wird ein kontinuierliches Zeitsignal in ein kontinuierliches Spektrum transformiert.

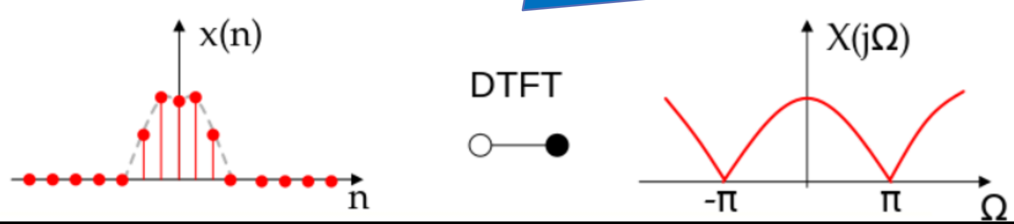
Varianten der FT

Definitionsmenge x	Periodizität von x		Frequenzspektrum
diskret, endlich	Aperiodisch, periodisch fortgesetzt		Diskret, endlich

Sind von einem Vorgang nur Werte an diskreten, äquidistanten Zeitpunkten in einem endlichen Intervall bekannt — durch diese Intervallbildung entsteht eine periodische Fortsetzung — wird die **diskrete Fourier-Transformation (DFT)** angewendet.

Es entsteht ein diskretes Frequenzspektrum mit Spiegelspektren.
Die DFT und deren Optimierungen in Form der **schnellen Fourier-Transformation (FFT)** spielen in der digitalen Signalverarbeitung eine bedeutende Rolle.

Varianten der FT

Definitions menge x	Periodizität von x		Frequenz-spektrum
Diskret, endlich	aperiodisch		kontinuierlich

Die **Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale** (englisch *discrete-time Fourier transform*, DTFT), geht wie die DFT von zeitlich diskreten Werten aus, bildet aber im Gegensatz zur DFT ein kontinuierliches Spektrum.

Man erhält bei der Transformationen ein Frequenzspektrum, das kontinuierlich ist

Zeitdiskrete FT = DTFT

- Da wir uns mit digitalen Audiosignalen $x[n]$ beschäftigen, ist insbesondere die Fourier Transformation für zeitdiskrete Signale relevant
- Zeitdiskrete Fourier Transformation DFTF (Discrete-Time FT)
- Statt der kontinuierlichen FT $X(\omega) = F(x)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt$ definiert man die DTFT mit der Abtastzeit $t_a = {}^{1}/_{f_a}$ mit Abtastrate f_a

$$X(\omega) = F(x[n])(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n t_a}$$

- Die inverse zeitdiskrete Fourier Transformation lautet:

$$x[n] = t_a \int_{-f_a}^{f_a} X(\omega)e^{i\omega n t_a}\,d\omega$$

- Falls $x[n]$ aus einem kontinuierlichen Signal $x(t)$ gesampled wurde, approximiert die DTFT die kontinuierliche Fourier-Transformation

Diskrete + kontinuierliche Frequenzen

Die DTFT normiert die Frequenzen des diskreten Signals auf den Bereich $[-\pi, \pi]$

Welche Frequenzen waren im Originalsignal vorhanden?

- Die Frequenzen des diskreten Signals hängen von der Abtastrate ab
- Die maximale Frequenz ist die Nyquist Frequenz
  - Sei $x[n]$ das diskrete Signal, das durch Abtastung von $x(t)$ entstanden ist, wobei T die Zeit zwischen den einzelnen Samples angibt. Wir nehmen an, dass die Abtastrate ausreichend hoch gewählt worden ist
  - Sei $\Omega = 2\pi f$ die kontinuierliche Winkelfrequenz des Signals (in rad/s: Ein volle Oszillation entspricht 2π rad)
  - Sei ω die diskrete Frequenz des Signals
  - Dann gilt $\omega = \Omega \cdot T$

Maximal Frequenz π im diskreten Signal $\longleftrightarrow$ Nyquist Frequenz im kontinuierlichen Signal

Eigenschaften der DTFT

- In der DTFT sind nur die Frequenzen unterhalb der halben Abtastrate (Nyquist Frequenz) korrekt
  - Diskrete Frequenzen π entsprechen der kontinuierlichen Nyquist Frequenz

- Es gibt einen schnellen Algorithmus, der die DTFT berechnet:
  Fast Fourier Transform (*FFT)*

  [Cooley, James W., and John W. Tukey. "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series." *Math. comput* 19.90 (1965): 297-301.]

- Die FFT spielt in der digitalen Signalverarbeitung eine bedeutende Rolle.