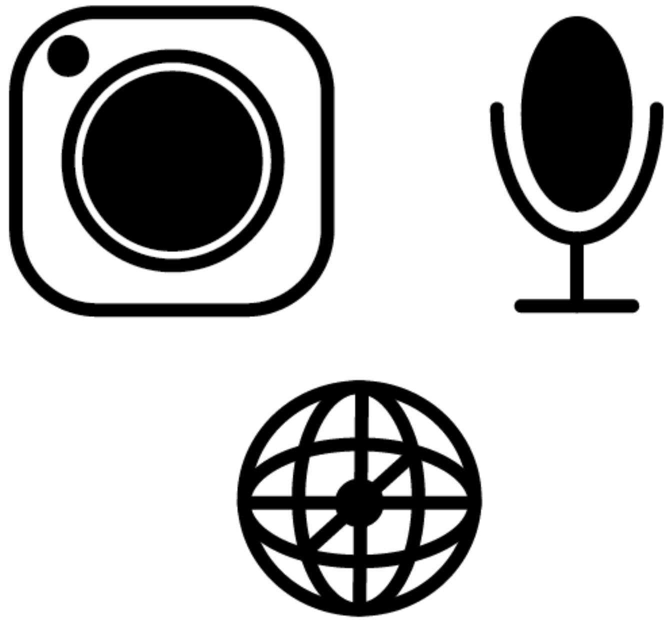


Sensordatenverarbeitung

2D-FREQUENZRAUM (7A)

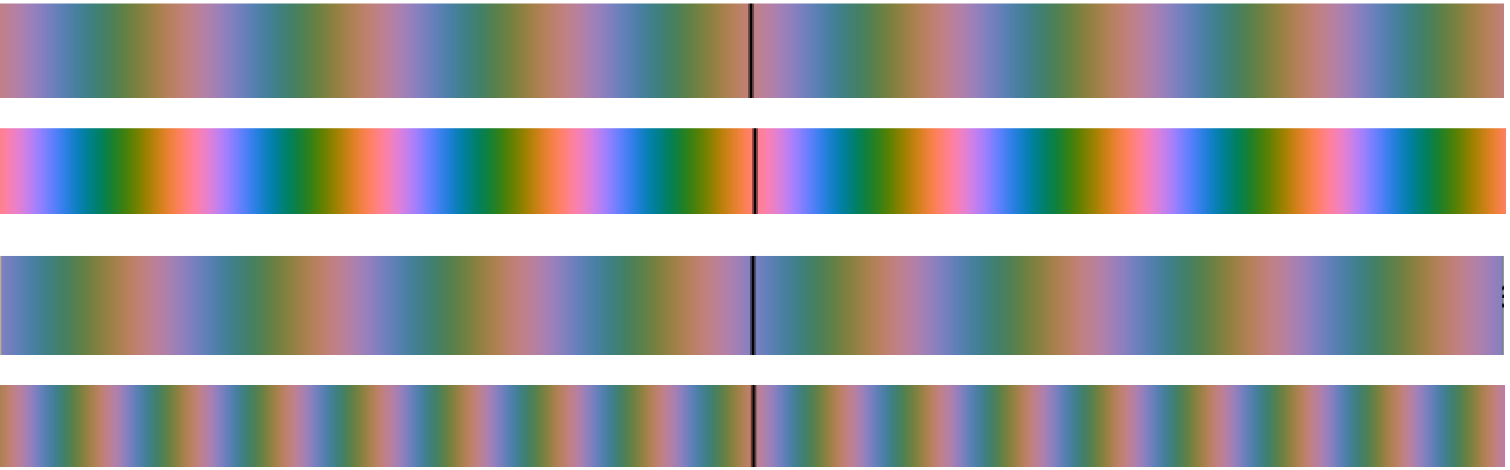
(25.-29.11.24)

Überblick

Nr.	Thema
1	Einleitung; einführende Beispiele
2	Datenaufnahme; Audio-Datenaufnahme
3	Bild-Datenaufnahme
4	Farbe, Segmentierung, Segmentierungsgetriebene BV
5	Audiosignal, 1D Frequenzraum, Fouriertransformation
6	Koordinatensysteme; Bewegungs-Datenaufnahme
7	2D Frequenzraum, 2D Filter
8	Kanten, SdV-Paradigmen, direkte Bildmerkmale
9	Houghtransformation, Bewegungsmerkmale
10	Audiomerkmale
11	Klassifizierungsalgorithmen
12	Entwicklung und Evaluation sensorbasierter Systeme
13	Bayes-Schätzung & Bayes-Filter

1D-Fouriertransformation

- Zerlegt 1D-Signal x(t)∈ℝ (t∈ℝ) als Summe von Sinuswellen verschiedener Frequenzen
- Für jede (Kreis-)Frequenz ω eine Amplitude und Phase
- Kombiniert als komplexe Zahl X(ω)∈ℂ
- $X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}$ ist (Ko-) Sinuswelle der Kreisfrequenz ω und durch X(ω) gegebener Amplitude (|X(ω)|) und Phase (arg X(ω))
- Live ausprobieren mit sketch_2dsine (Nextcloud / programme)

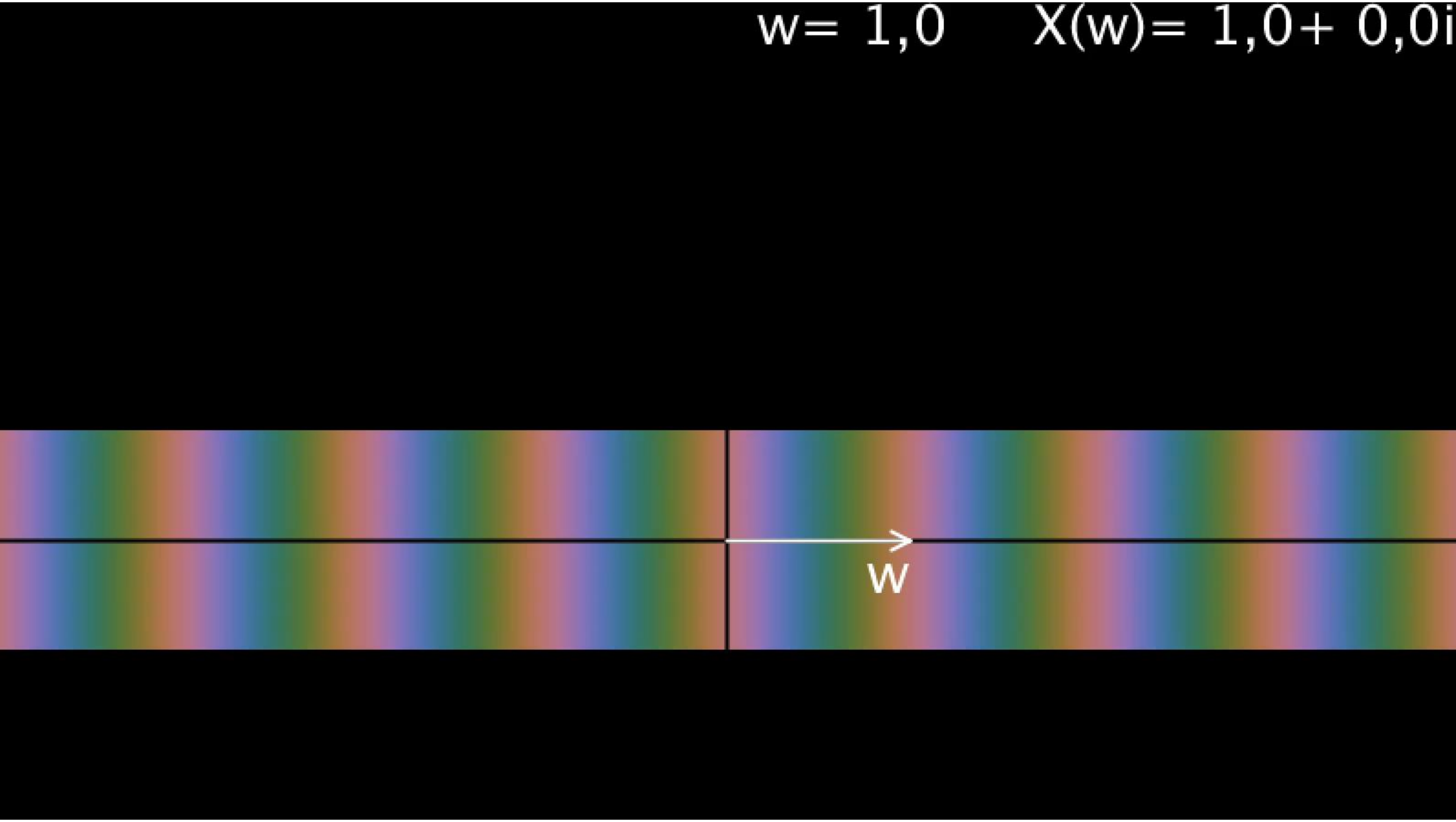


X(ω) = 1, ω =1

X(ω) = 2, ω =1

X(ω) = i, ω =1

X(ω) = 1, ω =2


w= 1,0 X(w)= 1,0+ 0,0i
w

1D-Fouriertransformation

- Zerlegt 1D-Signal $x(t) \in \mathbb{R}$ ($t \in \mathbb{R}$) als Summe von Sinuswellen verschiedener Frequenzen
- Für jede (Kreis-)Frequenz ω eine Amplitude und Phase
- Kombiniert als komplexe Zahl $X(\omega) \in \mathbb{C}$
- $X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}$ ist (Ko-) Sinuswelle der Kreisfrequenz ω und durch X(ω) gegebener Amplitude (|X(ω)|) und Phase (arg X(ω))

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega$$

Summation über Frequenzen (eigentlich Integration)

und Amplitude / Phase gemäß X(ω)

Sinuswelle mit Frequenz ω

FRAGE
Was ändert sich in 2D?

1D-Fouriertransformation

- Zerlegt 1D-Signal x(t)∈ℝ (t∈ℝ) als Summe von Sinuswellen verschiedener Frequenzen
- Für jede (Kreis-)Frequenz ω eine Amplitude und Phase
- Kombiniert als komplexe Zahl X(ω)∈ℂ
- $X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}$ ist (Ko-) Sinuswelle der Kreisfrequenz ω und durch X(ω) gegebener Amplitude (|X(ω)|) und Phase (arg X(ω))

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega$$

Summation über Frequenzen (eigentlich Integration)

und Amplitude / Phase gemäß X(ω)

Sinuswelle mit Frequenz ω

FRAGE
Was ändert sich in 2D?

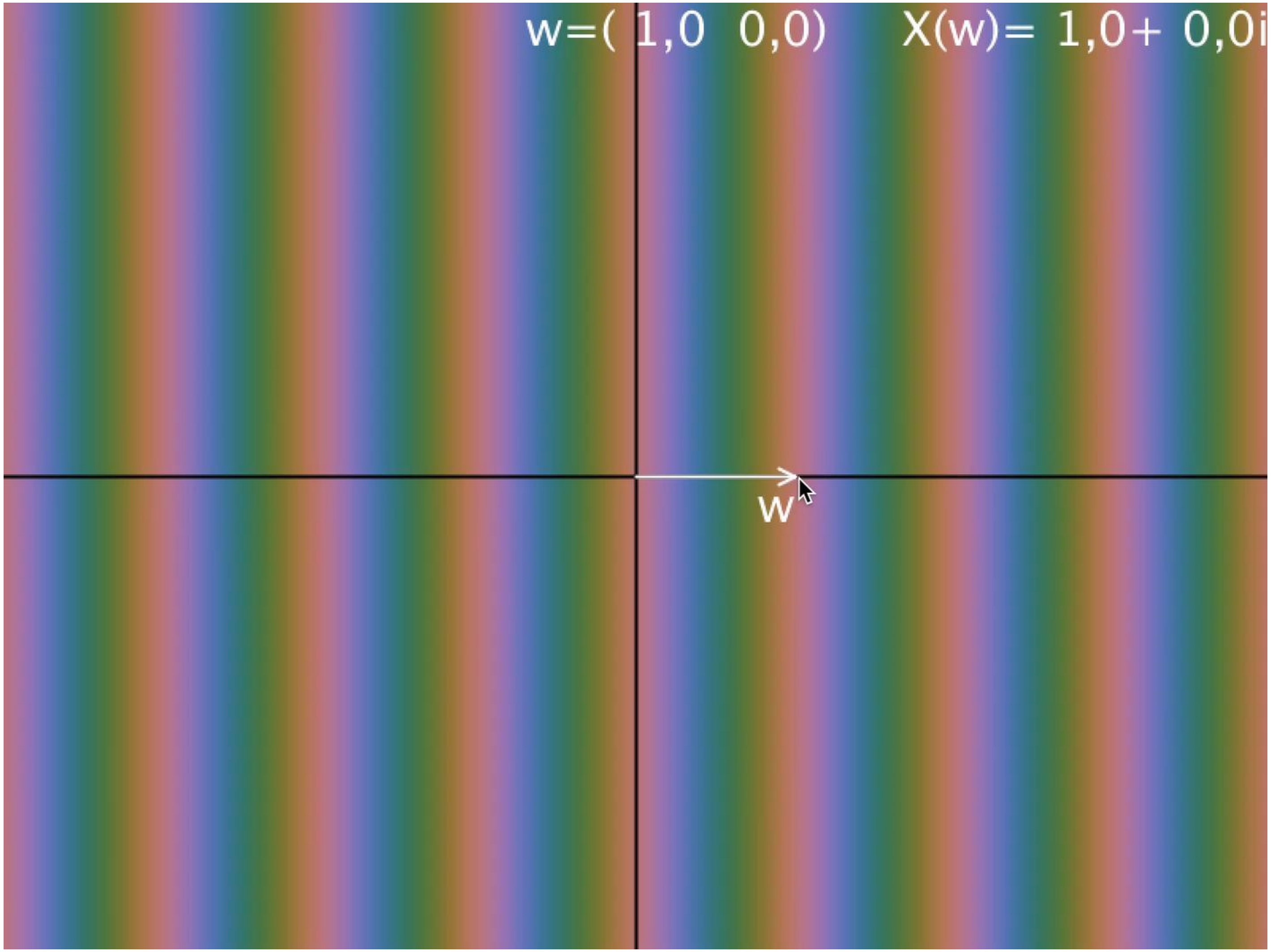
2D-Fouriertransformation

- Signal x(t), $t \in \mathbb{R}^2$ ist 2D-Vektor (Ort im Bild statt Zeit)
- Fourier-Transformierte X(ω), $\omega \in \mathbb{R}^2$ ist auch 2D-Vektor
- Was bedeutet $\omega \in \mathbb{R}^2$ als (Kreis-)Frequenz?
  - |ω| : „Wie schnell?“, Richtung von ω : „In welcher Richtung?“
- Zerlegt 2D-Signal x(t), als Summe von Sinuswellen verschiedener Frequenzen *und Richtungen*
- Für jede (Kreis-)Frequenz ω eine Amplitude und Phase
- Kombiniert als komplexe Zahl $X(\omega) \in \mathbb{C}$
- $X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega \cdot t}$ ist (Ko-)Sinuswelle der Kreisfrequenz/Richtung ω und durch X(ω) gegebener Amplitude (|X(ω)|) und Phase (arg X(ω))

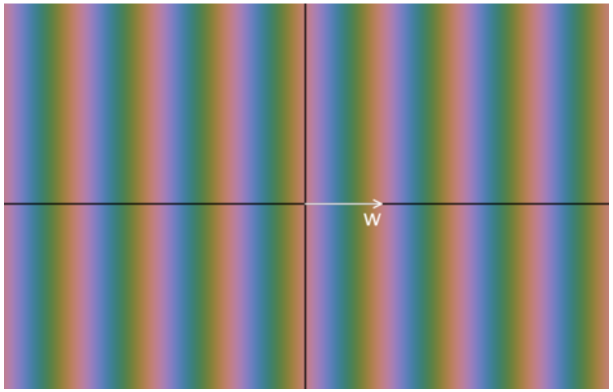
Skalarprodukt

1D: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega$

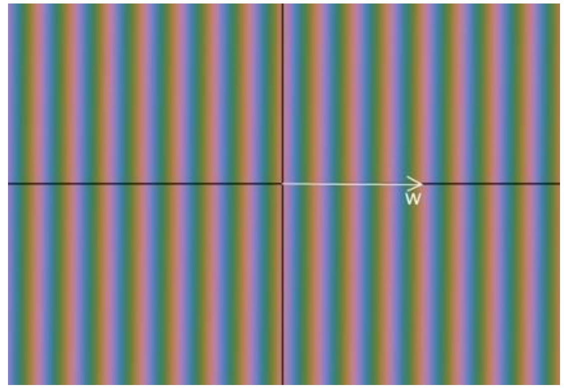
2D (Ko-)Sinuswelle



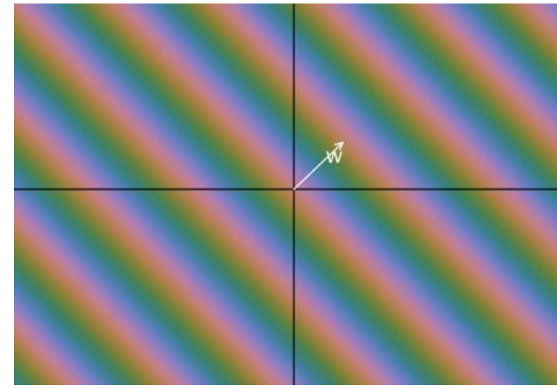
- $X(\omega)e^{i\omega\cdot t}$ ist (Ko-)Sinuswelle der Kreisfrequenz/Richtung ω und durch X(ω) gegebener Amplitude (|X(ω)|) und Phase (arg X(ω))



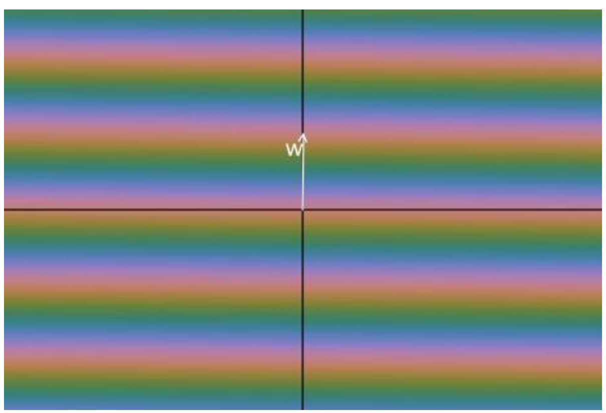
X(ω) = 1, ω =(1,0)



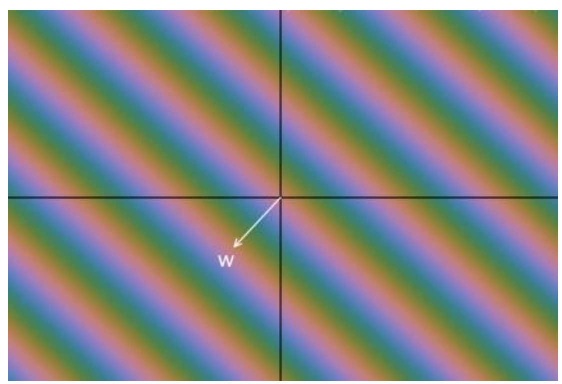
X(ω) = 1, ω =(2,0)



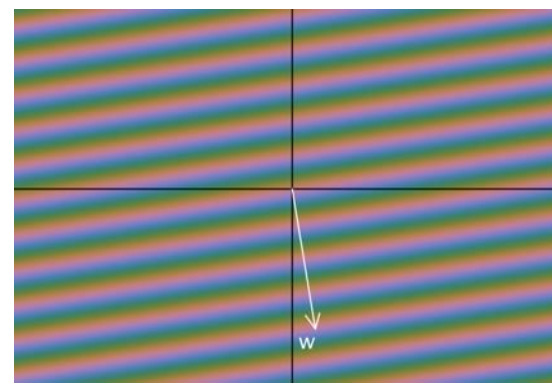
X(ω) = 1, ω =(0.7,0.7)



X(ω) = 1, ω =(0,1)



X(ω) = 1, ω =(-0.7,-0.7)



X(ω) = 1, ω =(0.3, -2)

2D-Fouriertransformation

AG MSIS · Cognitive Systems Lab

- Zerlegt 2D-Signal x(t), $t \in \mathbb{R}^2$ als Summe von Sinuswellen verschiedener Frequenzen *und Richtungen*
  - $t \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \omega \in \mathbb{R}^2$
  - |ω| : „Wie schnell?“, Richtung von ω : „In welcher Richtung?“
- Für jede (Kreis-)Frequenz ω eine Amplitude und Phase
- Kombiniert als komplexe Zahl $X(\omega) \in \mathbb{C}$
- $X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega\cdot t}$ ist Sinuswelle der Kreisfrequenz ω und durch X(ω) gegebener Amplitude (|X(ω)|) und Phase (arg X(ω))

$$X(\omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega\cdot t}\, dt \qquad x(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega\cdot t}\, d\omega$$

Skalarprodukt

Summation über 2D-Frequenzen (eigentlich Integration)

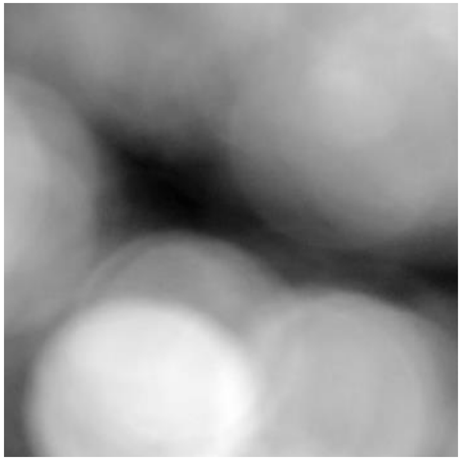
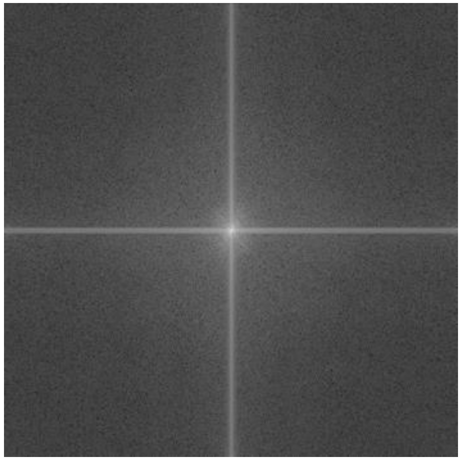
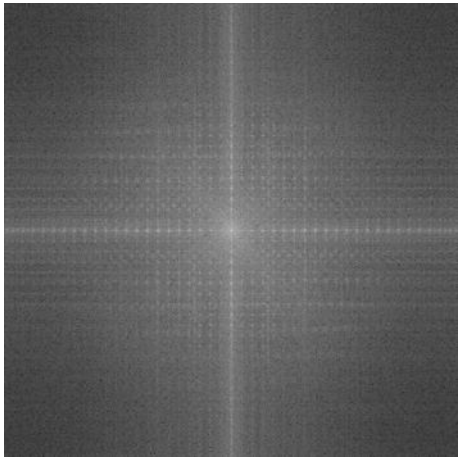
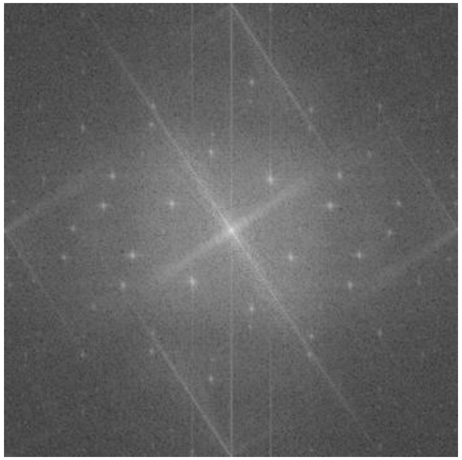
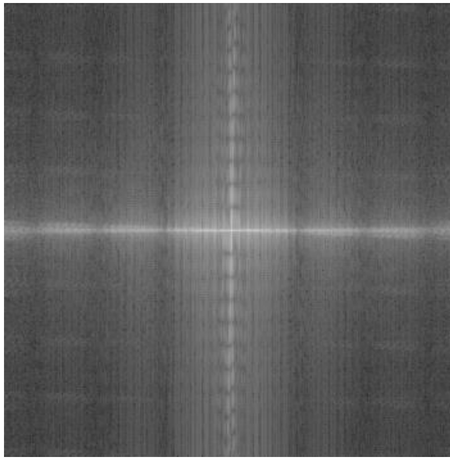
Amplitude / Phase gemäß X(ω)

Sinuswelle mit 2D-Frequenz ω

Universität Bremen

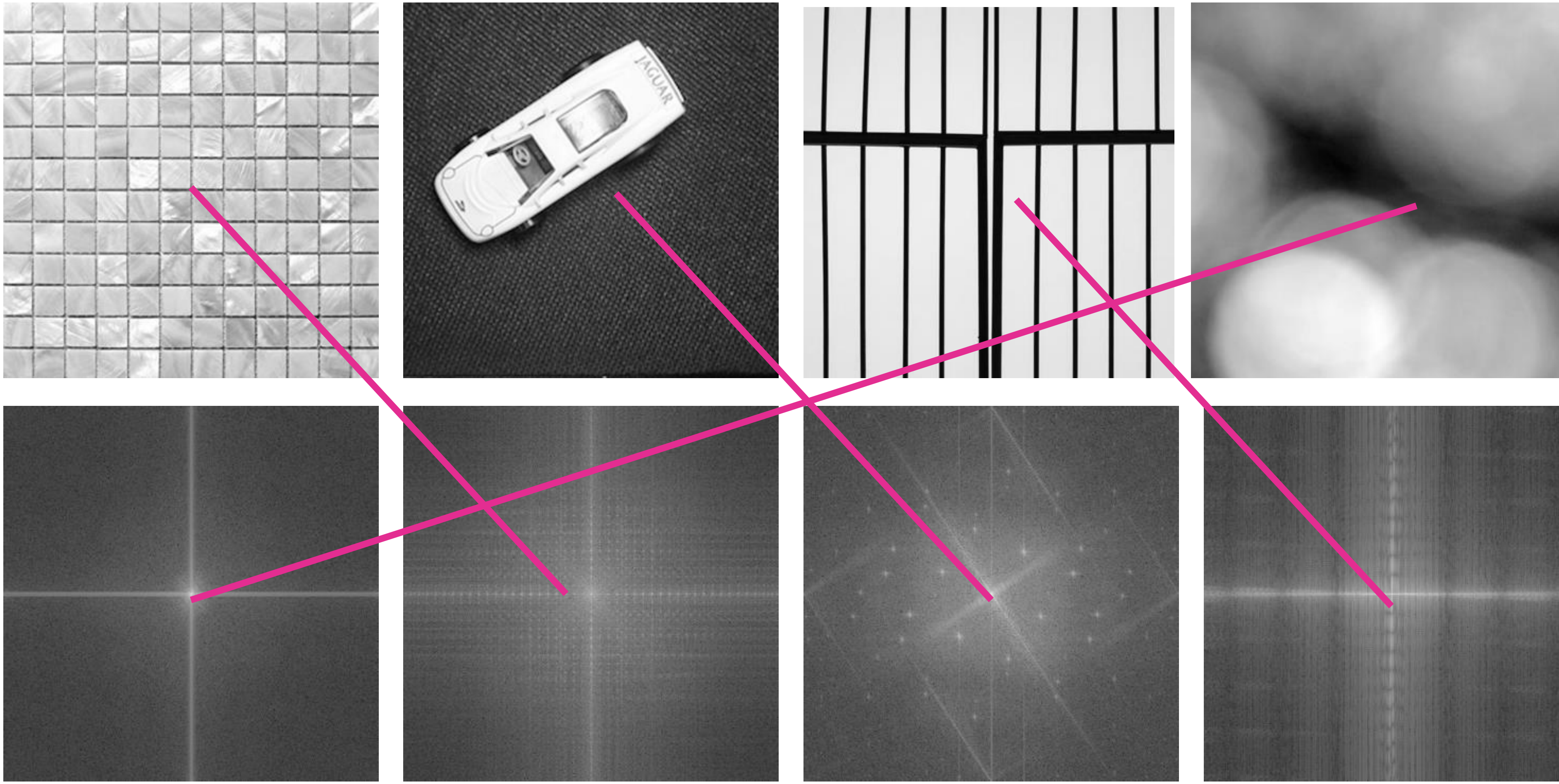
Frage an das Auditorium:
Welche Fouriertransformation gehört zu welchem Bild?



Quelle: http://bigwww.epfl.ch/demo/ip/demos/FFT/

Frage an das Auditorium:
Welche Fouriertransformation gehört zu welchem Bild?



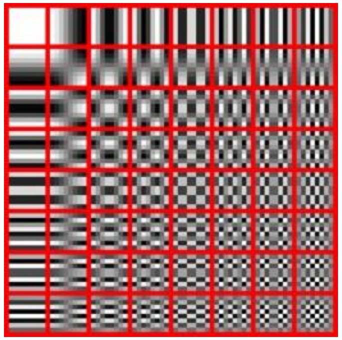
Warum haben alle Spektren bis auf das Auto ein „Kreuz“ in der Mitte?

- Rechteckige Form des Bildes selbst (FT sieht Signal als periodisch)
- Auto nicht, weil Teppich fast nahtlos oben-unten bzw. rechts-links passt

Quelle: http://bigwww.epfl.ch/demo/ip/demos/FFT/

Nutzen der Fouriertransformation

- 1D-Fouriertransformation ist sehr natürliche Zerlegung für Audio
  - Ohr zerlegt Schall in Frequenzen
  - Mehrere Schallquellen überlagern sich durch Addition
- 2D-Fouriertransformation für Bilder nicht ganz so natürlich
  - Auge zerlegt Licht nach Richtung (=Ort im Bild) nicht nach Frequenz
  - Mehrere Objekte überlagern sich durch Verdeckung
- Aber trotzdem sinnvoll
  - Trennung von Grobem und Feinem
  - Algorithmisches Werkzeug für schnelle Filterberechnung
- Anwendung: JPEG Kodierung
  - Trennen von Grobem und Feinem
  - Menschen nehmen Helligkeitsunterschiede im Grobem genauer wahr als im Feinem
  - Grobes genauer quantisieren als Feines
  - Möglich mit Fouriertransformation
  - Kosinustransformation (DCT, rechts) aus technischen Gründen



Zusammenfassung

- 2D-Fouriertransformation
  - Signal als Summe von (Ko-) Sinuswellen bestimmter Frequenz und Richtung
  - $\boldsymbol{\omega}$ ist Vektor, $|\boldsymbol{\omega}|$ ist (Kreis-)Frequenz, Richtung ist Richtung der Welle

$$X(\omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-i\omega\cdot t}\, dt \qquad x(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \mathrm{e}^{i\omega\cdot t}\, d\omega$$

Universität Bremen