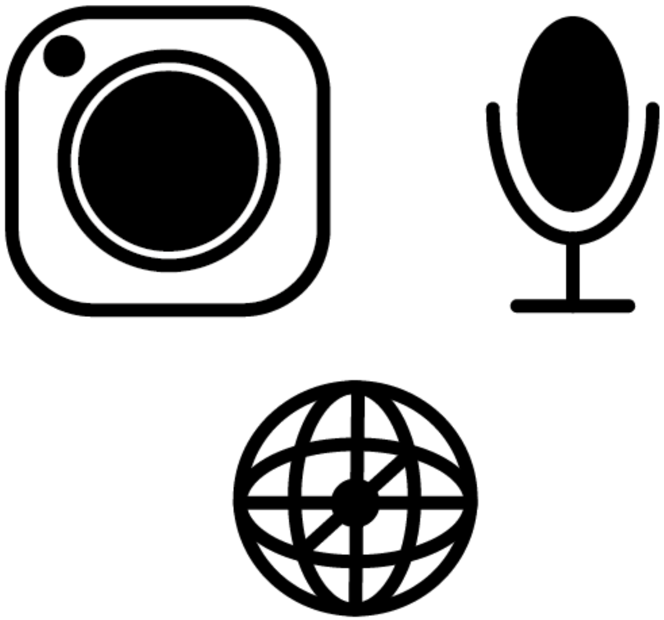


Sensordatenverarbeitung

FILTER (7B)

(25.-29.11.24)

Grundlegende Signalverarbeitung

- Offensichtlich: Sensordatenverarbeitung ist Verarbeitung von Signalen
- Frage: Gibt es eine grundlegende Klasse von Operationen auf Signalen?
- Allgemeine Erfahrung aus der Mathematik: Lineare Operationen sind
  - strukturiert
  - leicht zu verstehen
  - durch Zahlen beschreibbar
  - oft die Basis nichtlinearer Operationen
  - Beispiel: Matrizen für Koordinatentransformationen
- Besonders: Neuronale Netze lernen
  - lineare Teilfunktionen die über einfache Nichtlinearitäten verbunden sind
  - Neuronale Netze hier nicht explizit betrachtet
  - Aber, was hier kommt ist wichtig für neuronale Netze
- Ansatz 1: Betrachten wir lineare Funktionen Signal → Signal!

Lineare Funktion Signal→Signal

- Zuerst 1D (z.B. Audio)
- f: $R^n \rightarrow R^n$ (Signale der Länge n)
- Linearitätsaxiome:
  - $f(x+y) = f(x)+f(y)$
  - $f(\lambda x)=\lambda f(x)$
  - $\Rightarrow$ Wert der Ausgabe $f(x)_{t'}$ ist gewichtete Summe der Eingabewerte x_t.

$$f(x)_{t'} = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{t,t'} x_t$$

- Zu allgemeine Klasse von Funktionen
  - n^2 viele Zahlen $\alpha_{t,t'}$ zur Beschreibung nötig
  - Beschreibung abhängig von Signallänge
- Ansatz 2: Betrachten wir lineare, translationsinvariante Funktionen

Lineare Filter 1D

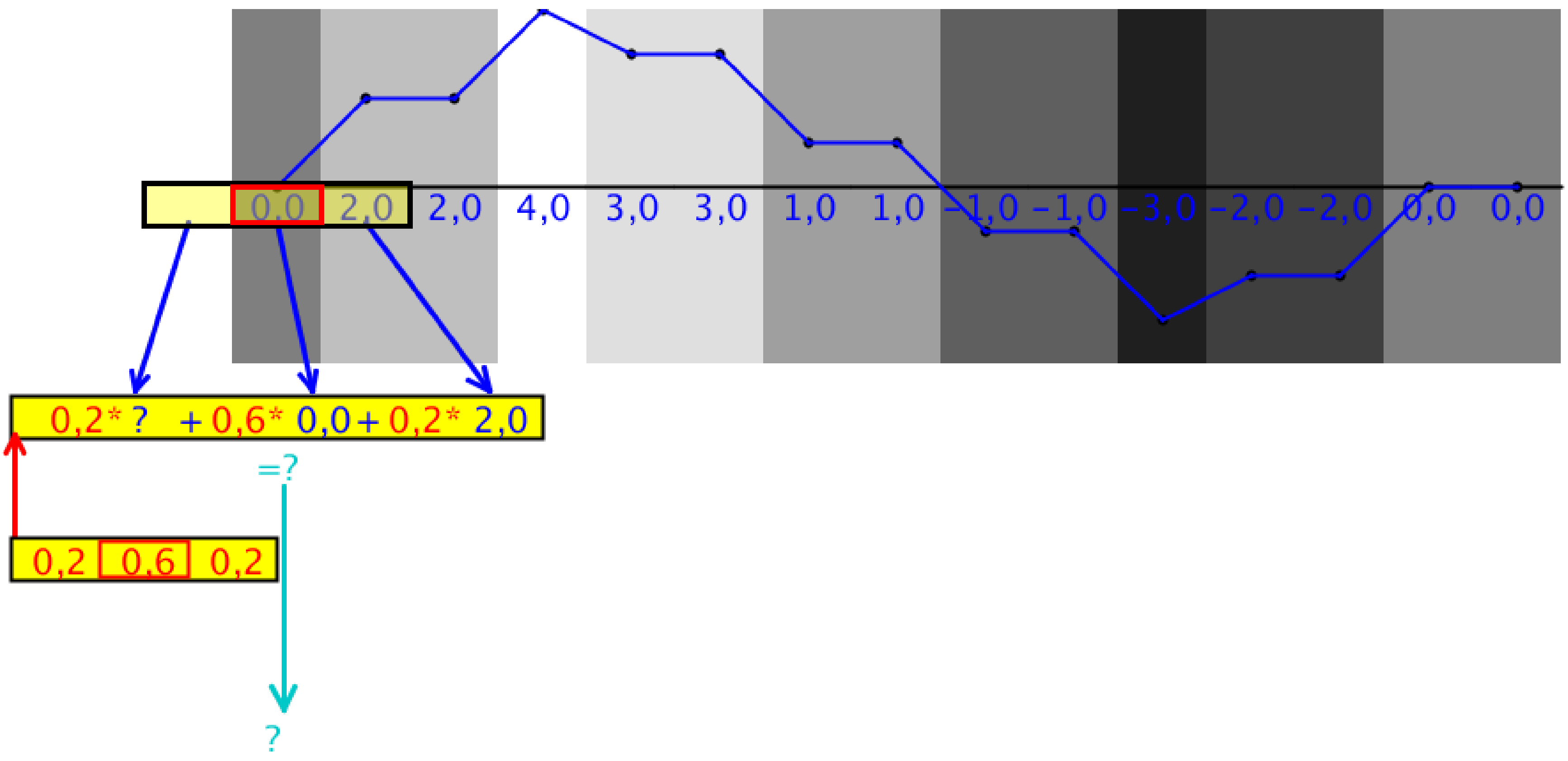
- Axiom: Translationsinvariant ("convolutional")
  - f(Trans(x)) = Trans(f(x))
  - Wirkt an jedem Zeitpunkt / Ort gleich
  - $\alpha_{t,t'}$ hängt nur an Relativposition t-t‘

$$f(x)_{t'} = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{t-t'} x_t$$

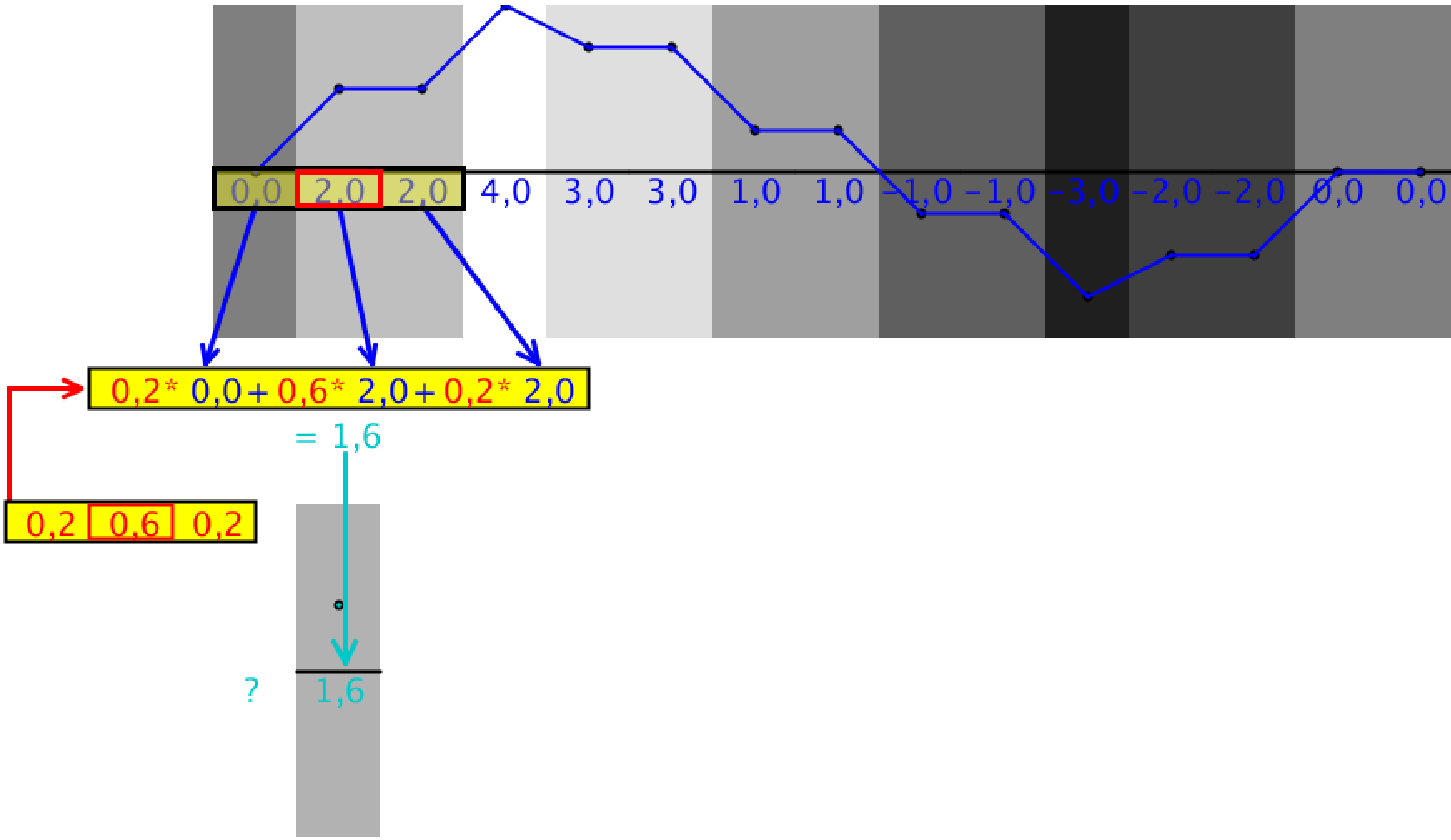
- α heißt Filter (Neutrum), -kern oder -maske
- Manchmal zusätzliche Forderung: α lokal
  - $\alpha_{t-t'} = 0$ für große |t-t'|
  - nur kleines Fenster der Eingabe beeinflusst einen Ausgabewert
- Folgende Demo: filter1d.pde (benötigt Processing)

Universität Bremen

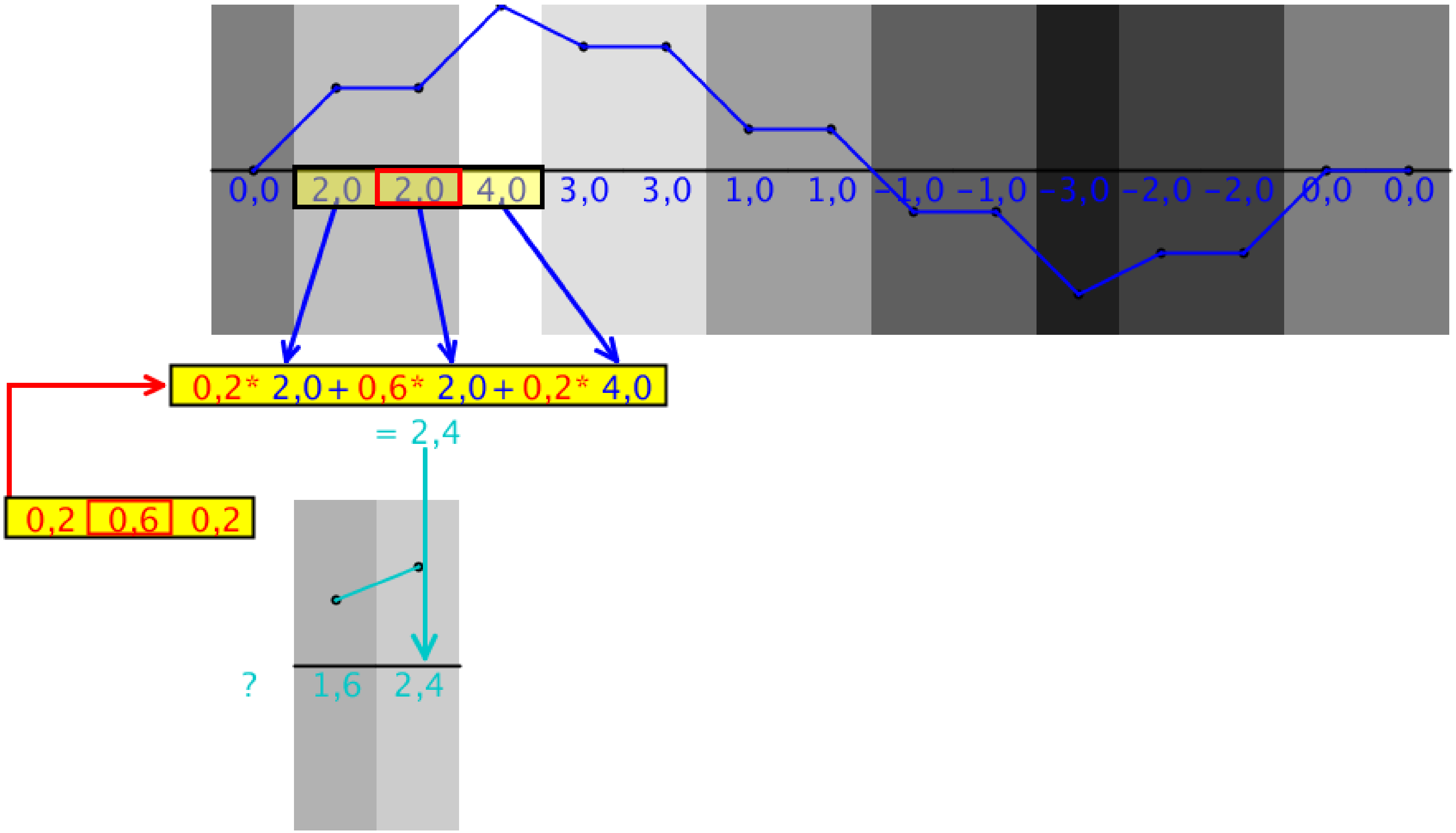
Lineare Filter 1D



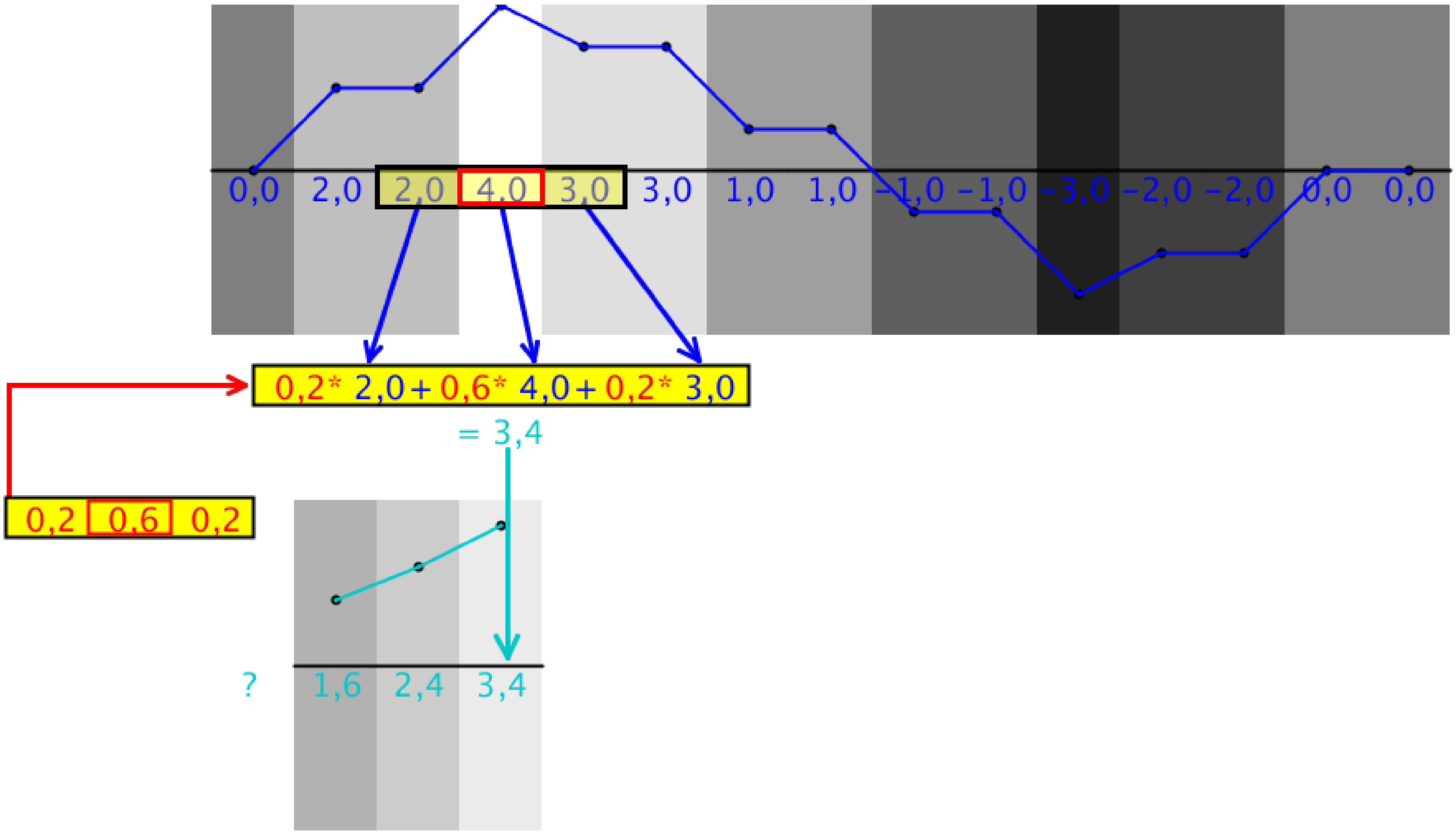
Lineare Filter 1D



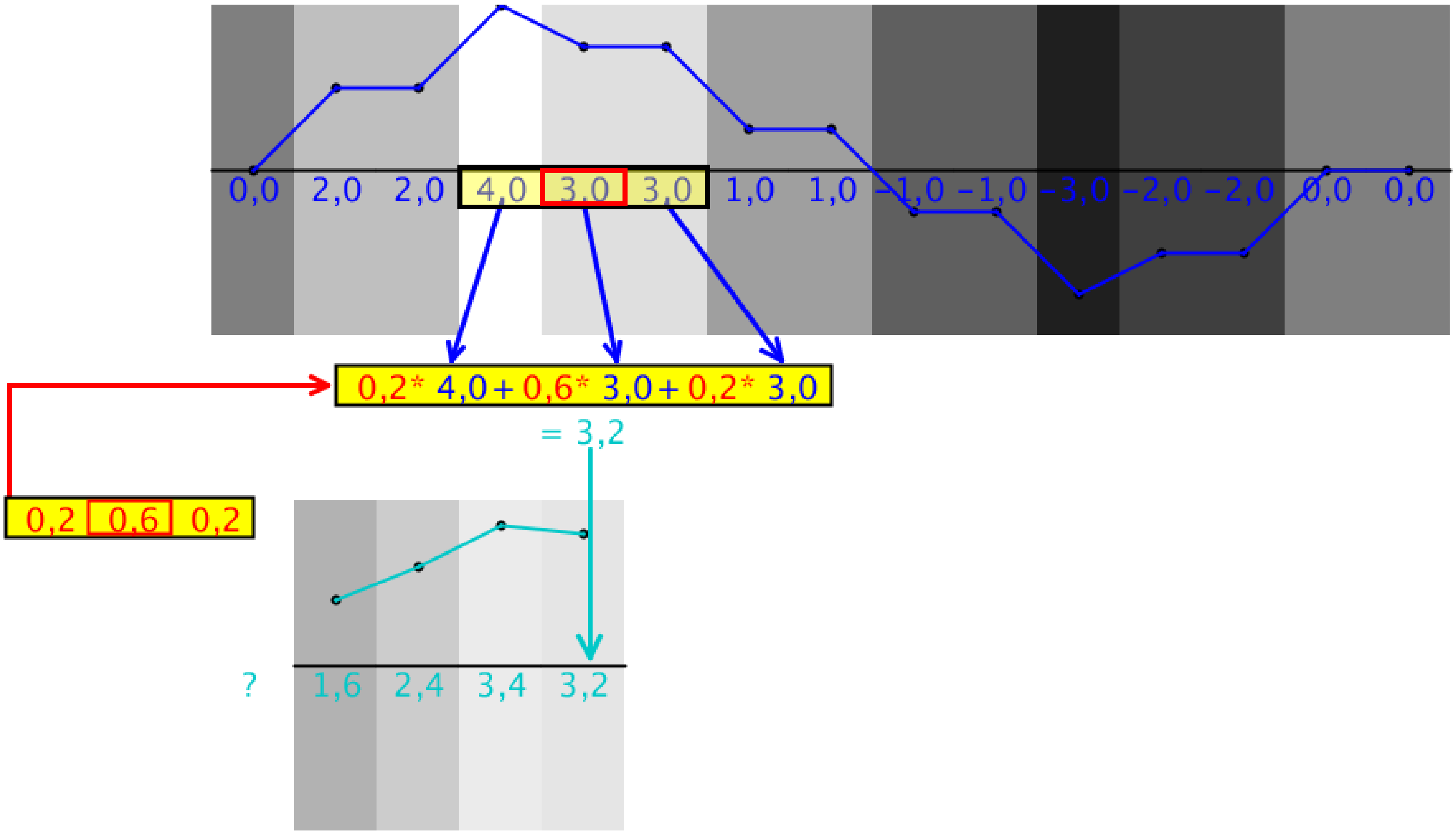
Lineare Filter 1D



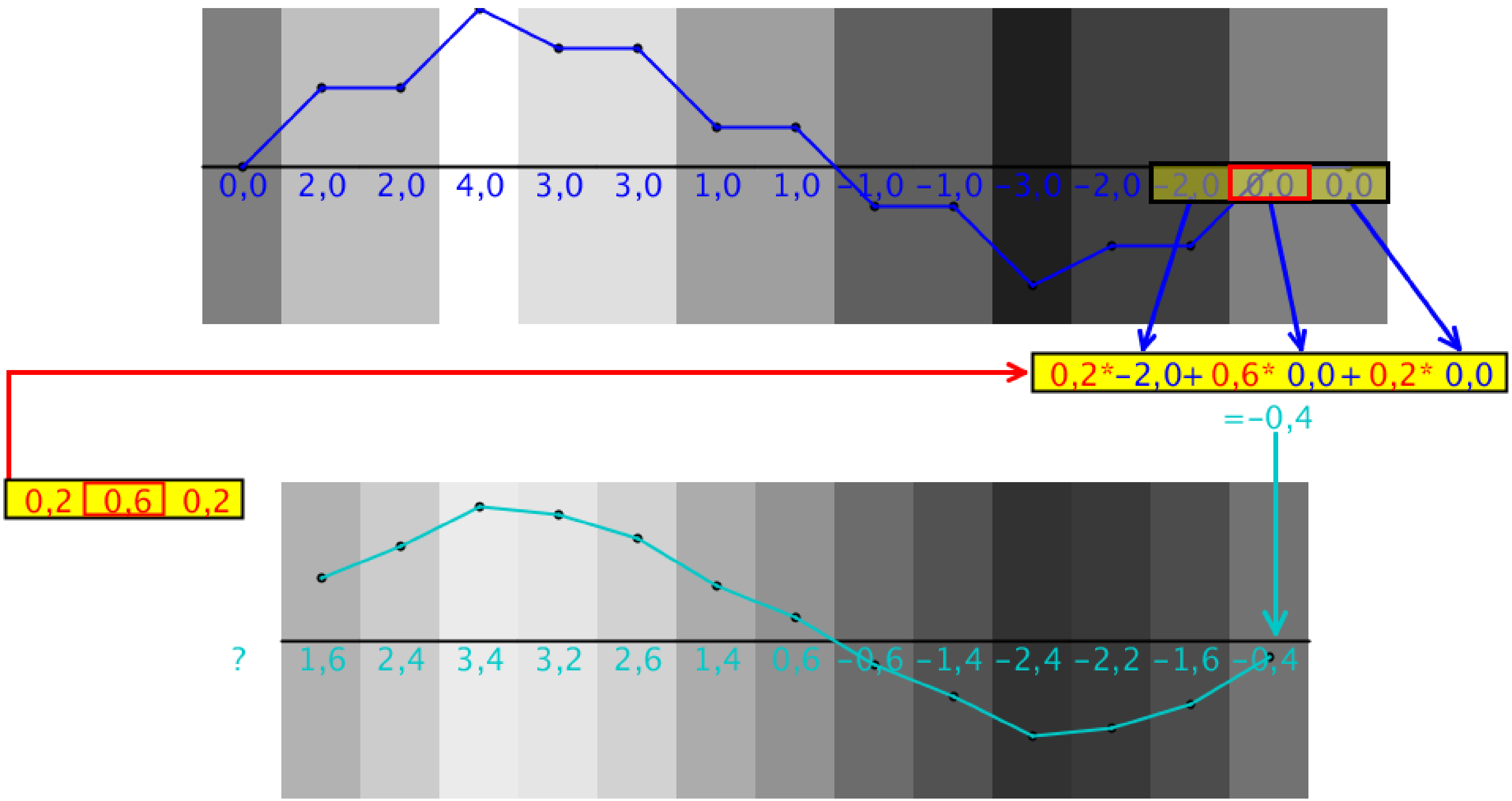
Lineare Filter 1D



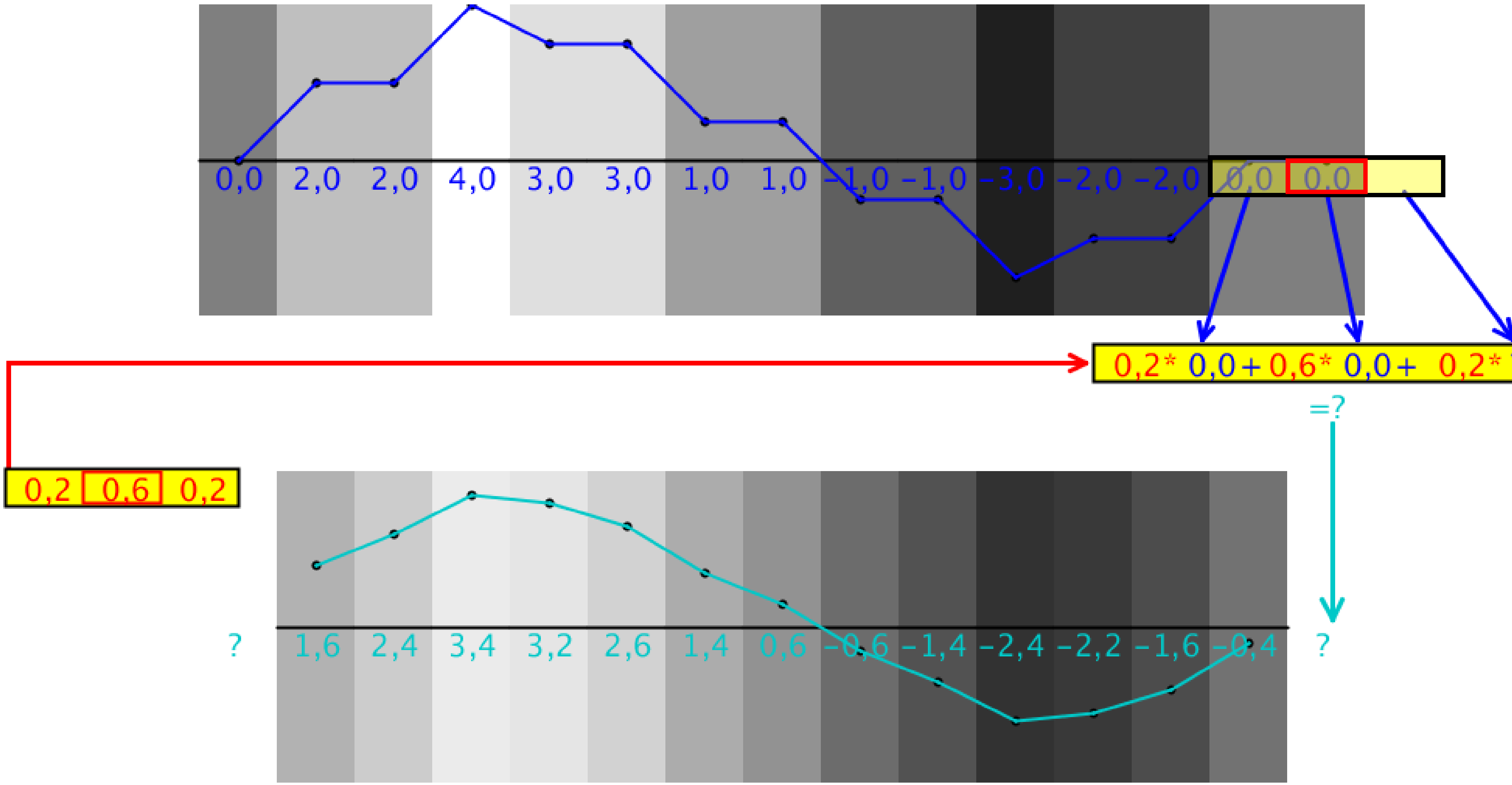
Lineare Filter 1D

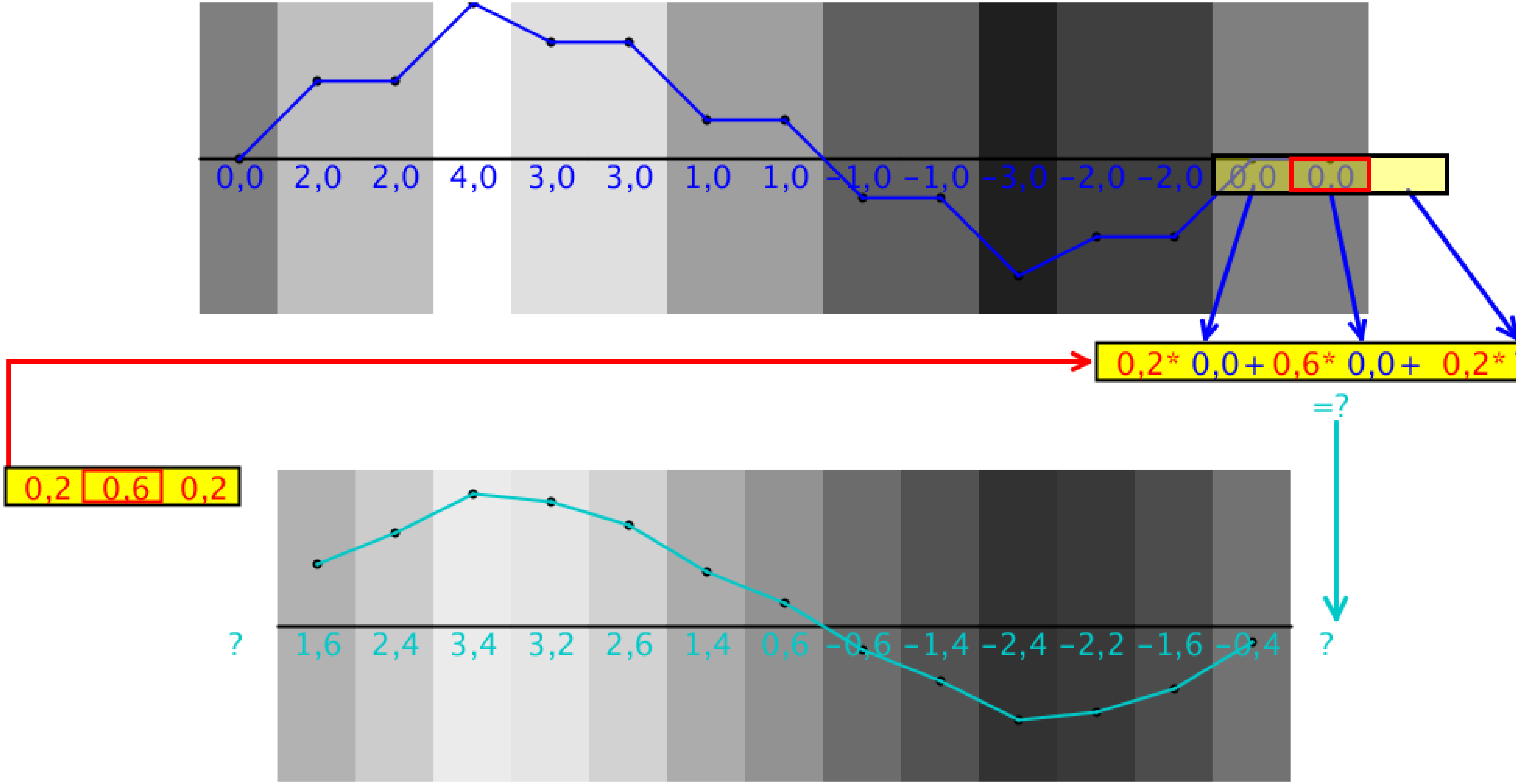


Lineare Filter 1D



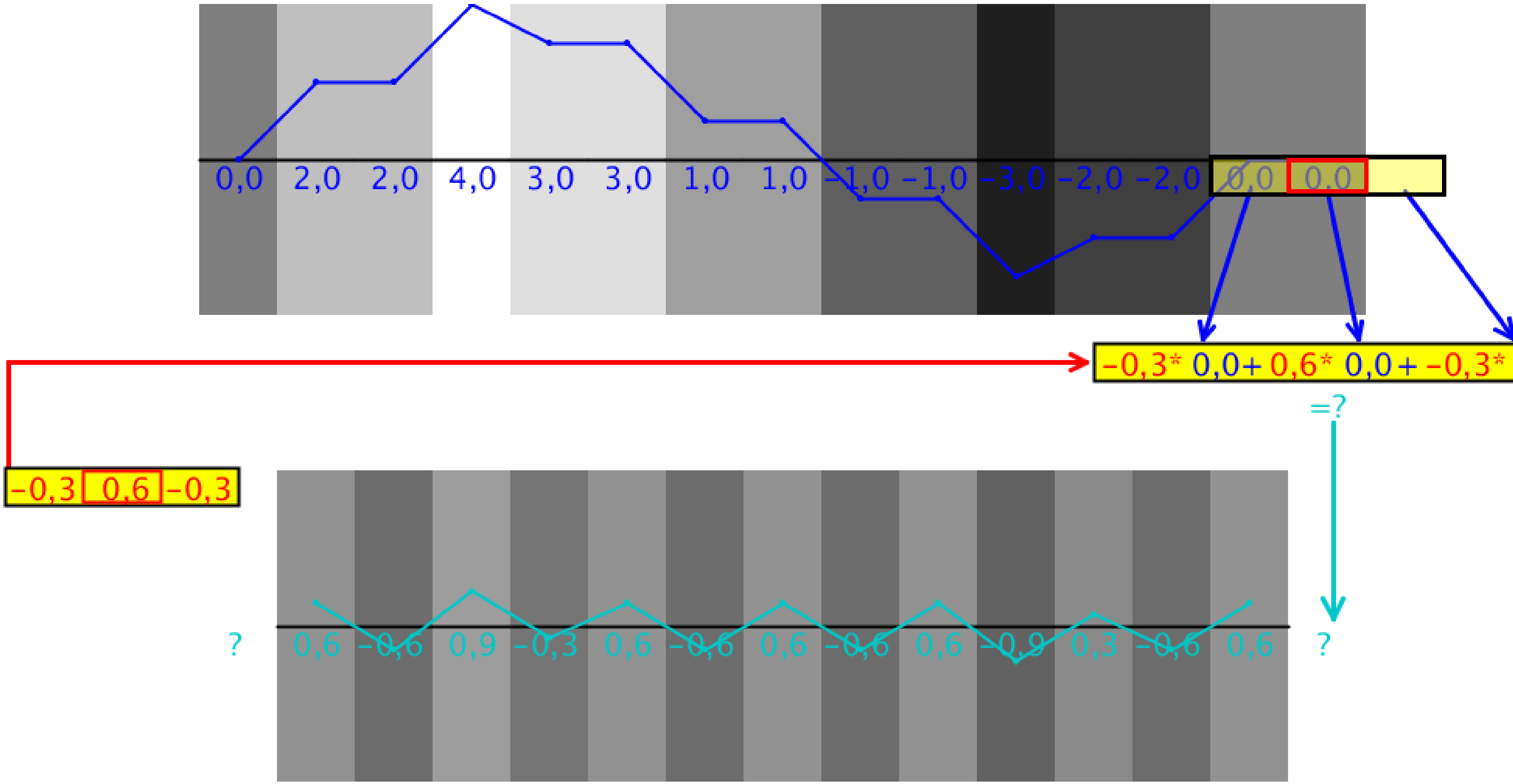
Lineare Filter 1D





Frage an das Auditorium: Was macht das Filter anschaulich?

- hohe Frequenzen werden entfernt → Tiefpassfilter



Frage an das Auditorium: Was macht dieses Filter anschaulich?

- tiefe Frequenzen werden entfernt → Hochpassfilter

Konvolution und Fouriertransf.

- Bisher: Definition eines Filters als
  – Lineare, translationsinvariante Funktion

$$f(x)_{t'} = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{t-t'} x_t$$

- Faltung, Konvolution, Operator *
  – Verknüpft zwei Signale
  – Filter α als Signal betrachtet
  – Kommutativ
  – Assoziativ

$$(\alpha * x)_{t'} = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{t'-t} x_t$$

- Konvolution spiegelt das Filter
  – Anschaulich schwieriger
  – Schönere mathematische Eigenschaften

$$f(x)_{t'} = (\text{flip}(\alpha) * x)_{t'}$$

- Konvolution entspricht Multiplikation im Frequenzraum
  – F : Fouriertransformation
  – Filter verstärken oder schwächen bestimmte Frequenzen um einen Faktor
  – Und verschieben ihre Phase (komplexe Multiplikation)
  – → Verständnis, was Filter machen
  – → effiziente Berechnung bei großen Filtern

$$F(\alpha * x) = F(\alpha)F(x)$$

$$F(\alpha x) = F(\alpha) * F(x)$$

Konvolution und Fouriertransf.

AG MSIS | Cognitive Systems Lab

- Bisher: Definition eines Filters als
  - Lineare, translationsinvariante Funktion

$$f(x)_{t'} = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{t-t'} x_t$$

- Faltung, Konvolution, Operator *
  - Verknüpft zwei Signale
  - Filter α als Signal betrachtet
  - Kommutativ
  - Assoziativ

$$(\alpha * x)_{t'} = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{t'-t} x_t$$

- Konvolution spiegelt das Filter
  - Anschaulich schwieriger
  - Schönere mathematische Eigenschaften

$$f(x)_{t'} = (\mathrm{flip}(\alpha) * x)_{t'}$$

- Konvolution entspricht Multiplikation im Frequenzraum
  - F : Fouriertransformation
  - Filter verstärken oder schwächen bestimmte Frequenzen um einen Faktor
  - Und verschieben ihre Phase (komplexe Multiplikation)
  - → Verständnis, was Filter machen
  - → effiziente Berechnung bei großen Filtern

$$F(\alpha * x) = F(\alpha) F(x)$$

$$F(\alpha x) = F(\alpha) * F(x)$$

Lineare Filter 2D

- Signal x(t), $t \in \mathbb{R}^2$ ist 2D-Vektor (Ort im Bild statt Zeit)
- f: $R^{n\times m} \rightarrow R^{n\times m}$ (Bilder der Größe n×m)
- Linearitätsaxiome:
  - f(x+y) = f(x)+f(y)
  - $f(\lambda x)=\lambda f(x)$
  - $\Rightarrow$ Wert der Ausgabe $f(x)_{t'}$ ist gewichtete Summe der Eingabewerte x_t.

$$f(x)_{t'} = \sum_{t=1,1}^{n,m} \alpha_{t,t'} x_t$$

Summation über 2D-Vektor t

4D-Array von Koeffizienten

- Zu allgemeine Klasse von Funktionen
  - $(nm)^2$ viele Zahlen $\alpha_{t,t'}$ zur Beschreibung nötig
  - Z.B. 1024×768 $\rightarrow$ 618 Mrd.
  - Beschreibung abhängig von Bildformat

Lineare Filter 2D

- Axiom: Translationsinvariant ("convolutional")
  - f(Trans(i)) = Trans(f(i))
  - Wirkt an Zeitpunkt / Ort gleich
  - $\alpha_{x,y,x',y'}$ hängt nur an Relativposition x-x‘, y-y‘

$$f(x)_{t'} = \sum_{t=1,1}^{n,m} \alpha_{t-t'} x_t$$

Summation über 2D-Vektor t

2D-Array von Koeffizienten

- Manchmal zusätzliche Forderung: α lokal
  - $\alpha_{t-t'} = 0$ für große |t-t'|
  - nur kleines Fenster der Eingabe beeinflusst einen Ausgabewert

Lineare Filter 2D

0·?	1/6 ·?	0 ·?
1/6 ·?	2/6 ·6	1/6 ·6
0 ·?	1/6 ·6	0 ·6

$\sum$

0	1/6	0
1/6	2/6	1/6
0	1/6	0

α

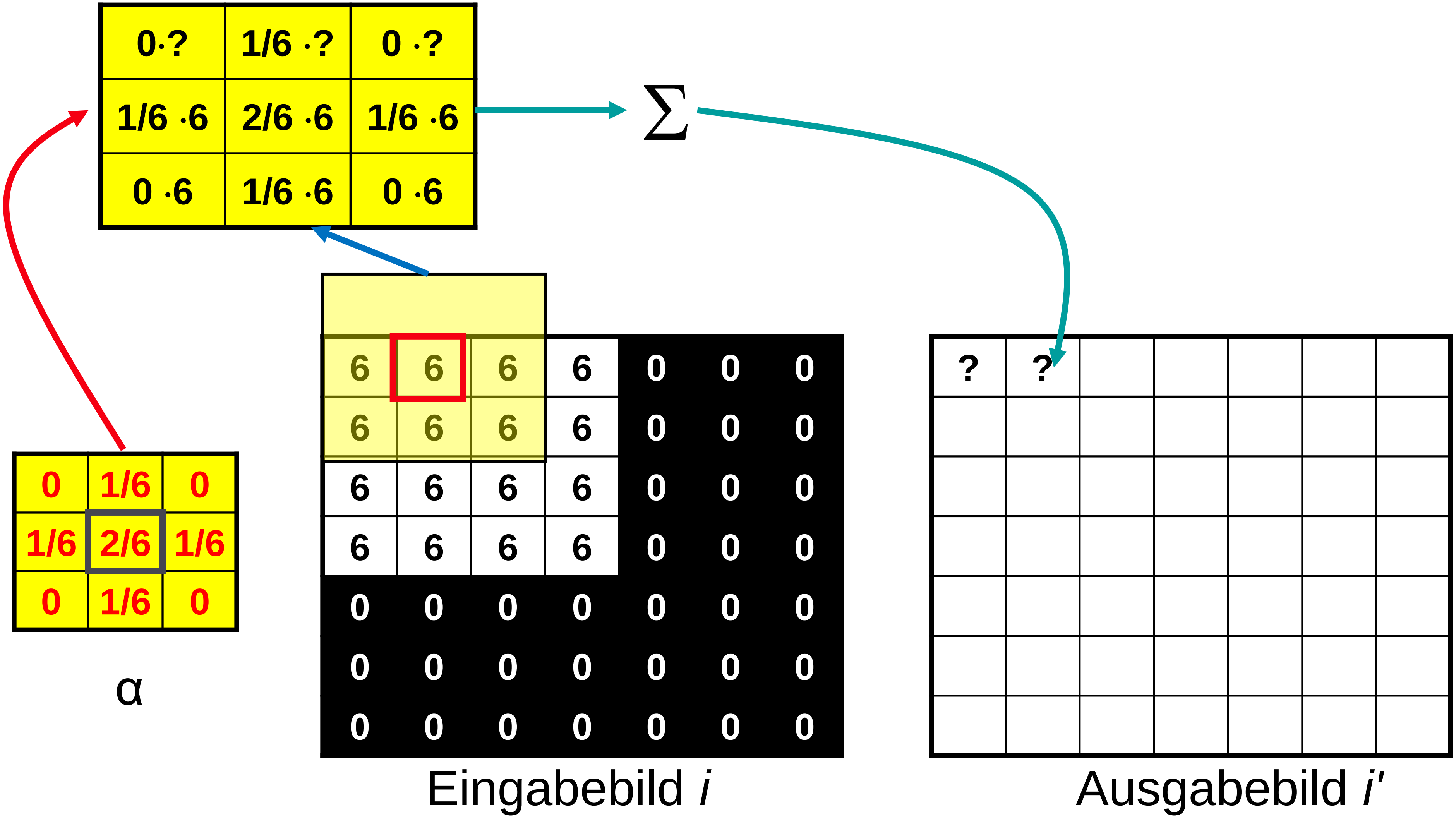
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Eingabebild *i*

?						

Ausgabebild *i'*

Lineare Filter 2D



Lineare Filter 2D

0·6	1/6 ·6	0 ·6
1/6 ·6	2/6 ·6	1/6 ·6
0 ·6	1/6 ·6	0 ·6

$\sum$

0	1/6	0
1/6	2/6	1/6
0	1/6	0

α

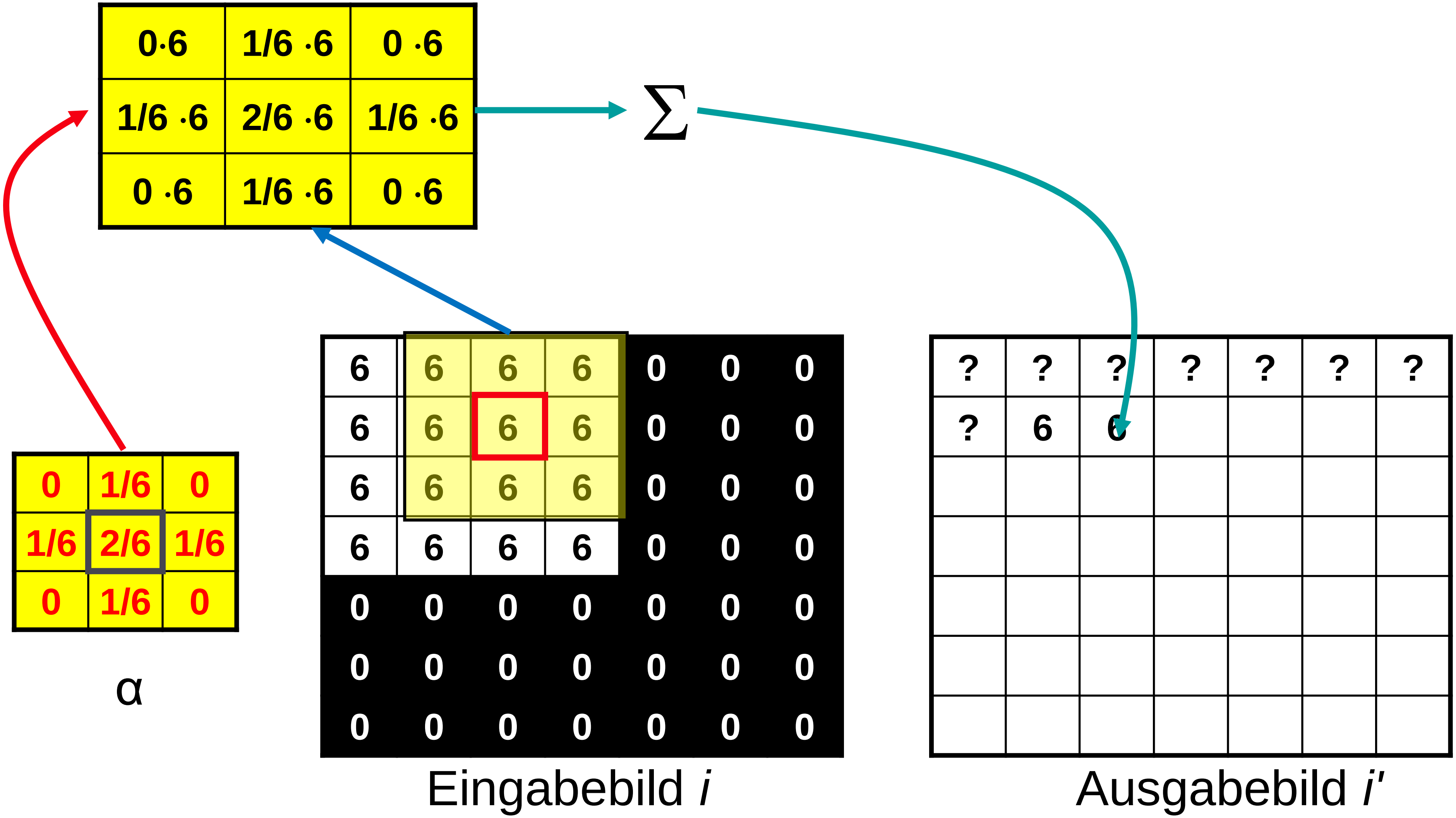
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Eingabebild *i*

?	?	?	?	?	?	?
?	6					

Ausgabebild *i'*

Lineare Filter 2D



Lineare Filter 2D

0·6	1/6 ·6	0 ·0
1/6 ·6	2/6 ·6	1/6 ·0
0 ·6	1/6 ·6	0 ·0

$\sum$

0	1/6	0
1/6	2/6	1/6
0	1/6	0

α

6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Eingabebild *i*

?	?	?	?	?	?	?
?	6	6	5			

Ausgabebild *i'*

Lineare Filter 2D

0·6	1/6 ·0	0 ·0
1/6 ·6	2/6 ·0	1/6 ·0
0 ·6	1/6 ·0	0 ·0

$\sum$

0	1/6	0
1/6	2/6	1/6
0	1/6	0

α

6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Eingabebild *i*

?	?	?	?	?	?	?
?	6	6	5	1		

Ausgabebild *i'*

Lineare Filter 2D

0·6	1/6 ·0	0 ·0
1/6 ·6	2/6 ·0	1/6 ·0
0 ·6	1/6 ·0	0 ·0

$\sum$

0	1/6	0
1/6	2/6	1/6
0	1/6	0

α

6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Eingabebild *i*

?	?	?	?	?	?	?
?	6	6	5	1	0	

Ausgabebild *i'*

Lineare Filter 2D

- Frage an das Auditorium: Was macht das Filter anschaulich?

0	1/6	0
1/6	2/6	1/6
0	1/6	0

α

6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Eingabebild *i*

?	?	?	?	?	?	?
?	6	6	5	1	0	?
?	6	6	5	1	0	?
?	5	5	4	1	0	?
?	1	1	1	0	0	?
?	0	0	0	0	0	?
?	?	?	?	?	?	?

Ausgabebild *i'*

- Frage an das Auditorium: Was macht das Filter anschaulich?
- Das Bild wird geglättet, d.h. verwischt oder unscharf.
- Tiefpass → Details werden verwischt

0	1/6	0
1/6	2/6	1/6
0	1/6	0

α

6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Eingabebild *i*

?	?	?	?	?	?	?
?	6	6	5	1	0	?
?	6	6	5	1	0	?
?	5	5	4	1	0	?
?	1	1	1	0	0	?
?	0	0	0	0	0	?
?	?	?	?	?	?	?

Ausgabebild *i'*

Lineare Filter 2D

- Oft haben Filterkoeffizienten einen gemeinsamen Nenner
- Vereinfachung: Den Nenner vorziehen
  - leichter zu schreiben → Klausur
  - manchmal schneller zu rechnen

0	1/6	0
1/6	$\boxed{2/6}$	1/6
0	1/6	0

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lineare Filter 2D

0·6	0 ·6	0 ·0
0 ·6	-1/2 ·6	1/2 ·0
0 ·6	0 ·6	0 ·0

$\sum$

0	0	0
0	-1/2	1/2
0	0	0

α

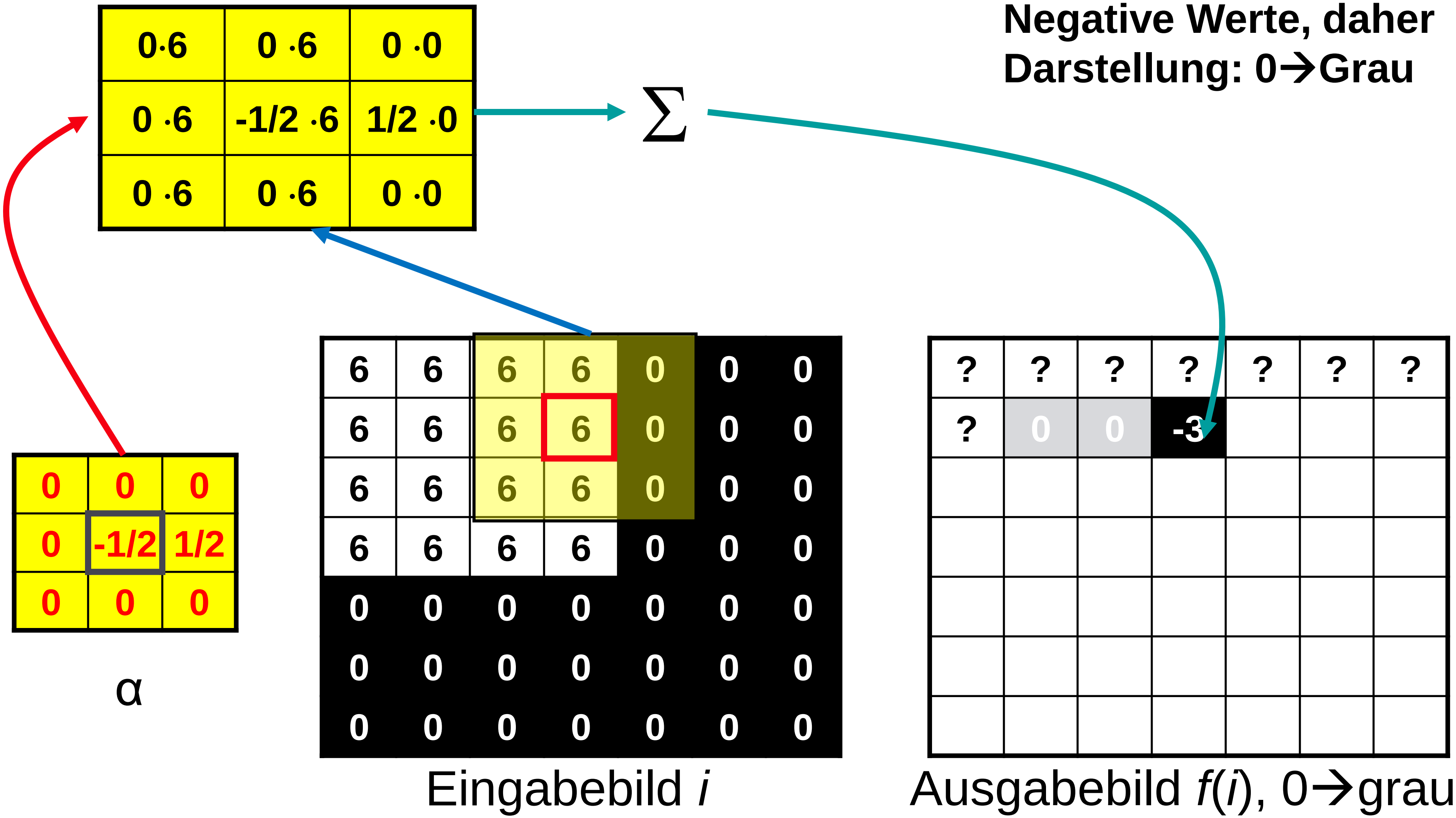
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Eingabebild *i*

?	?	?	?	?	?	?
?	0	0	-3			

Ausgabebild *f*(*i*)

Negative Werte, daher Darstellung: 0→Grau



Lineare Filter 2D

- Frage an das Auditorium: Was macht das Filter anschaulich?

0	0	0
0	-1/2	1/2
0	0	0

α

6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Eingabebild *i*

?	?	?	?	?	?	?
?	0	0	0	-3	0	?
?	0	0	0	-3	0	?
?	0	0	0	-3	0	?
?	0	0	0	0	0	?
?	0	0	0	0	0	?
?	?	?	?	?	?	?

Ausgabebild *f*(*i*), 0→grau

Lineare Filter 2D

- Frage an das Auditorium: Was macht das Filter anschaulich?
- Vertikale Kanten werden erkannt.

0	0	0
0	-1/2	1/2
0	0	0

α

6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
6	6	6	6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Eingabebild *i*

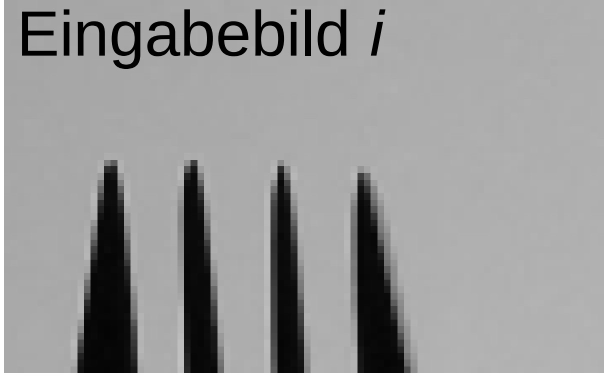
?	?	?	?	?	?	?
?	0	0	0	-3	0	?
?	0	0	0	-3	0	?
?	0	0	0	-3	0	?
?	0	0	0	0	0	?
?	0	0	0	0	0	?
?	?	?	?	?	?	?

Ausgabebild *f*(*i*), 0→grau

- **Frage an das Auditorium: Welches Bild gehört zu welchem Filter?**

$\frac{1}{28} \cdot$

0	0	1	0	0
0	2	3	2	0
1	3	4	3	1
0	2	3	2	0
0	0	1	0	0



1	1	1
0	0	0
-1	-1	-1

1	0	-1
1	0	-1
1	0	-1

$\frac{1}{8} \cdot$

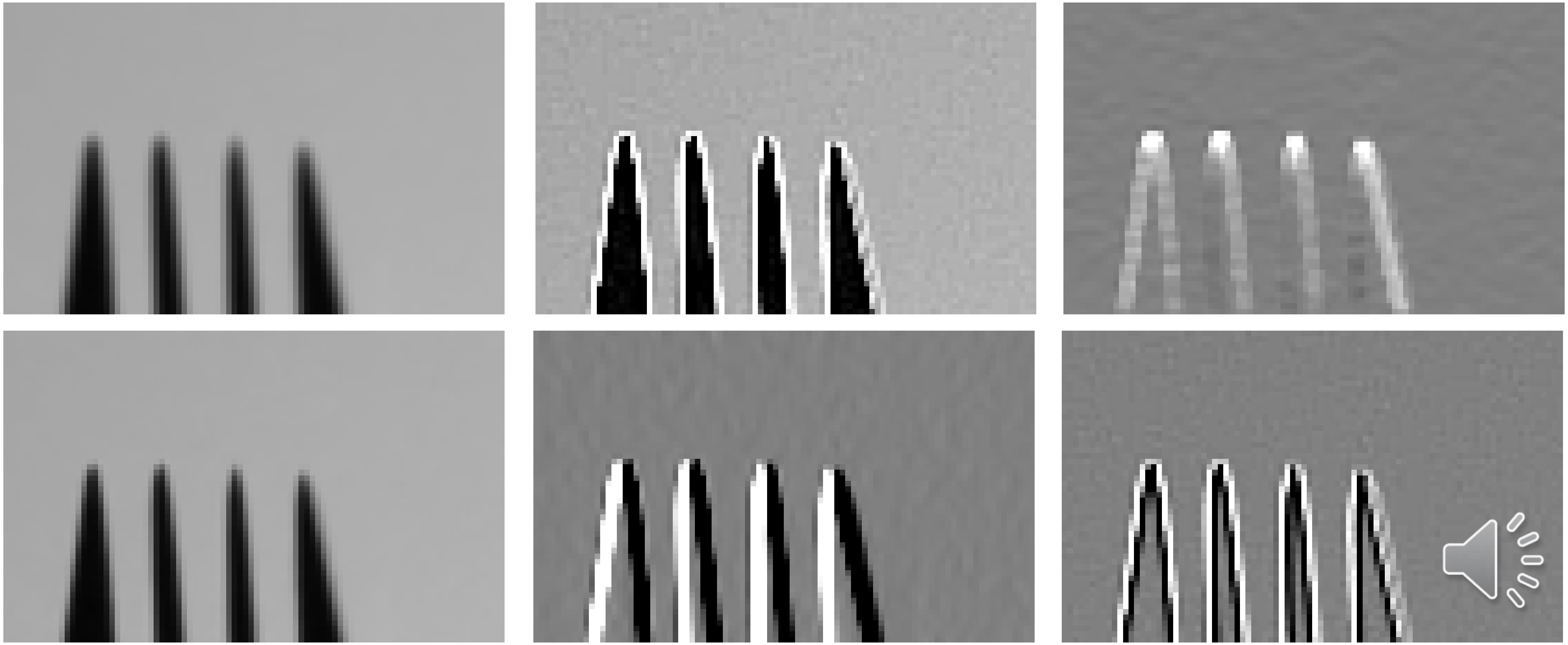
0	1	0
1	4	1
0	1	0

$\frac{1}{2} \cdot$

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

$\frac{1}{2} \cdot$

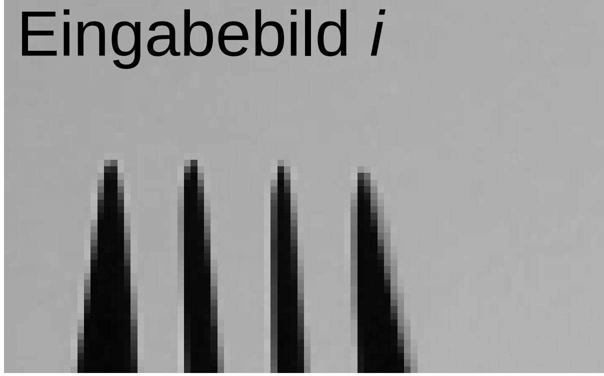
-1	-1	-1
-1	10	-1
-1	-1	-1



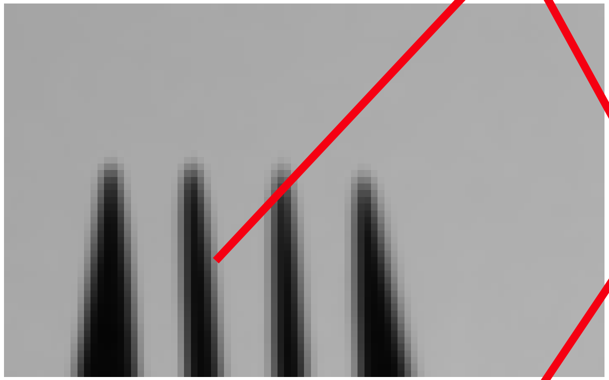
- **Frage an das Auditorium: Welches Bild gehört zu welchem Filter?**

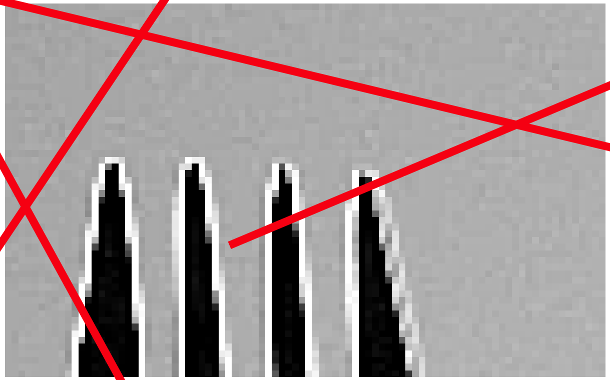
$$\frac{1}{28}\cdot\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&2&3&2&0\\1&3&\boxed{4}&3&1\\0&2&3&2&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

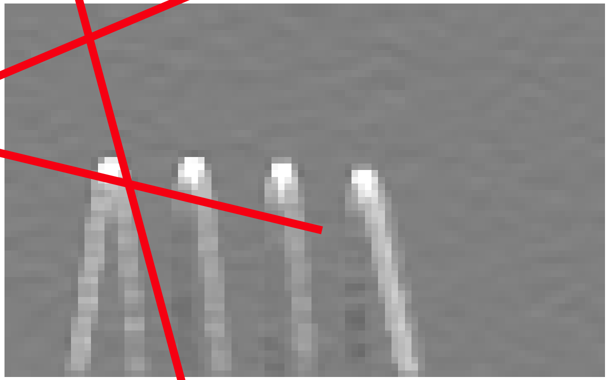
Eingabebild *i*

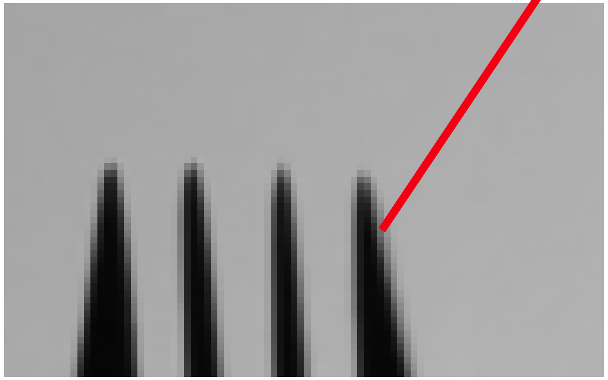


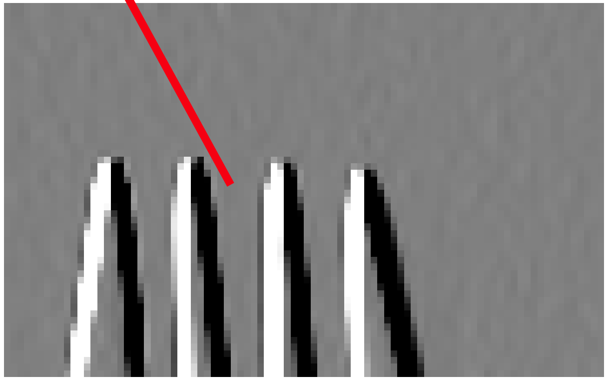
$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&\boxed{0}&0\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&\boxed{0}&-1\\1&0&-1\end{bmatrix}\qquad\frac{1}{8}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\\1&\boxed{4}&1\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&\boxed{8}&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\qquad\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&\boxed{10}&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$$

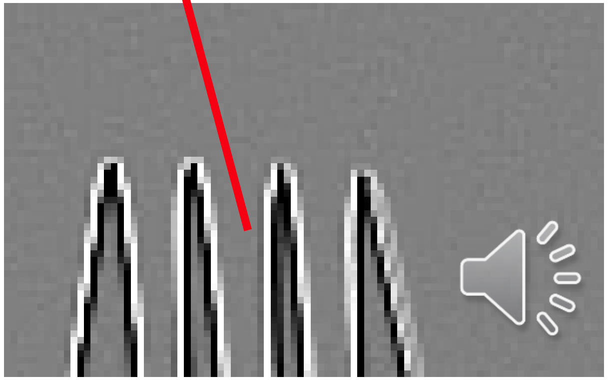






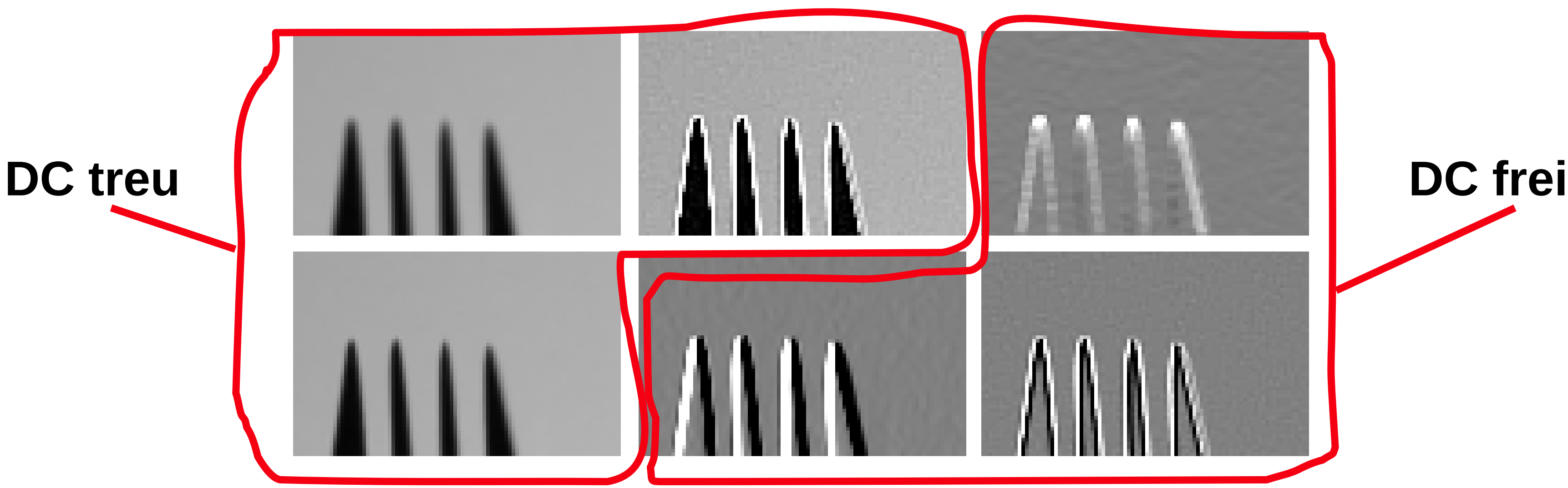






Directed Current (DC) Anteil

- Summe der Filterkoeffizienten ist Antwort auf konstante Eingabe
- Directed Current = Gleichstrom
- DC Anteil 0: Helligkeit „im Großen“ spielt keine Rolle (DC frei).
  - Negative Ergebnisse: Für Darstellung 0 → grau
- DC Anteil 1: Helligkeit „im Großen“ bleibt gleich (DC treu).
- DC Anteil$\neq$0: Filter skalierbar auf DC Anteil =1
  - führt zu gemeinsamen Nenner



Zusammenfassung

- Filter
  - Lineare, translationsinvariante Abb. von Signalen
  - Oft zusätzlich lokal
  - Grundbaustein der Signalverarbeitung
  - t 1D oder 2D

$$f(x)_{t'} = \sum_t \alpha_{t-t'} x_t$$

- Fouriertransformation und Filter
  - Filtern = Multiplikation im Frequenzraum
  - Verstärkung und Phasenverschiebung je Frequenz

$$F(\alpha * x) = F(\alpha) F(x)$$