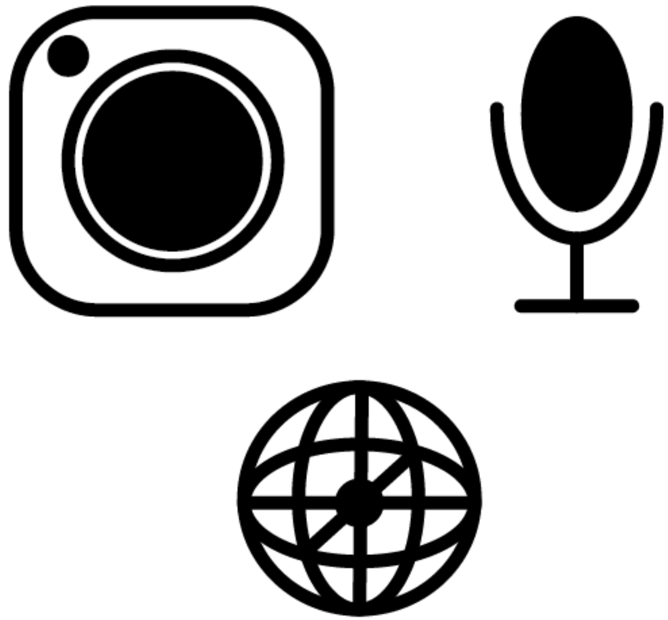


Sensordatenverarbeitung

BAYES-METHODE (13A)

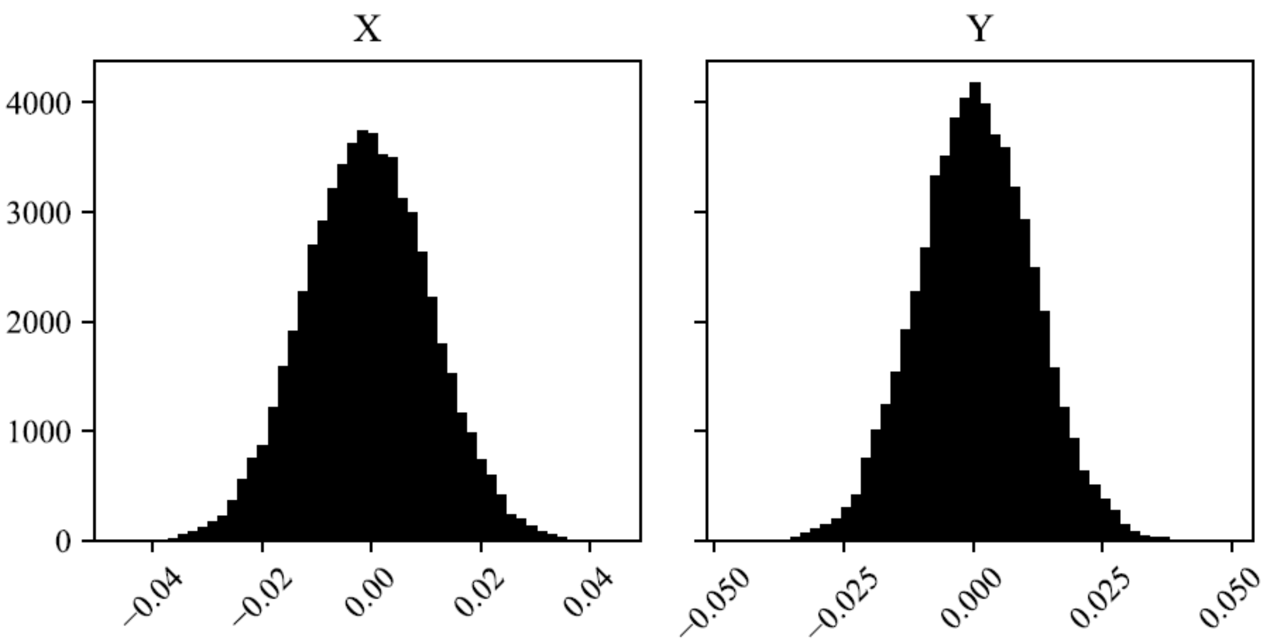
(ab 20.1.25)

Sensordaten sind anders

- "Weil sie beeinflusst werden von der überwältigenden Vielzahl an Phänomenen, die die Wirklichkeit zu bieten hat.", SdV VL 1

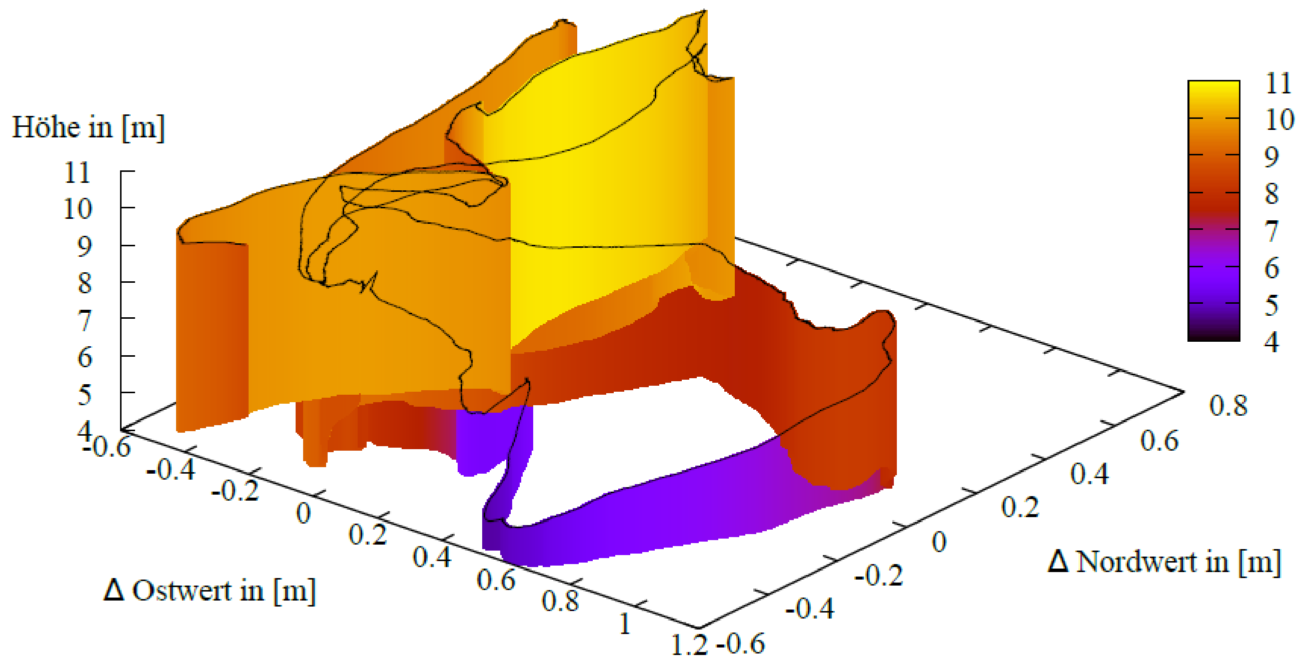
Messfehler eines Accelerometers

- Accelerometer in Ruhe
- Häufigkeit des Auftretens bestimmter Differenzen zum Mittelwert X, Y, Z
- Messfehler folgt (gut genähert) einer Glockenkurve (Gaußverteilung)



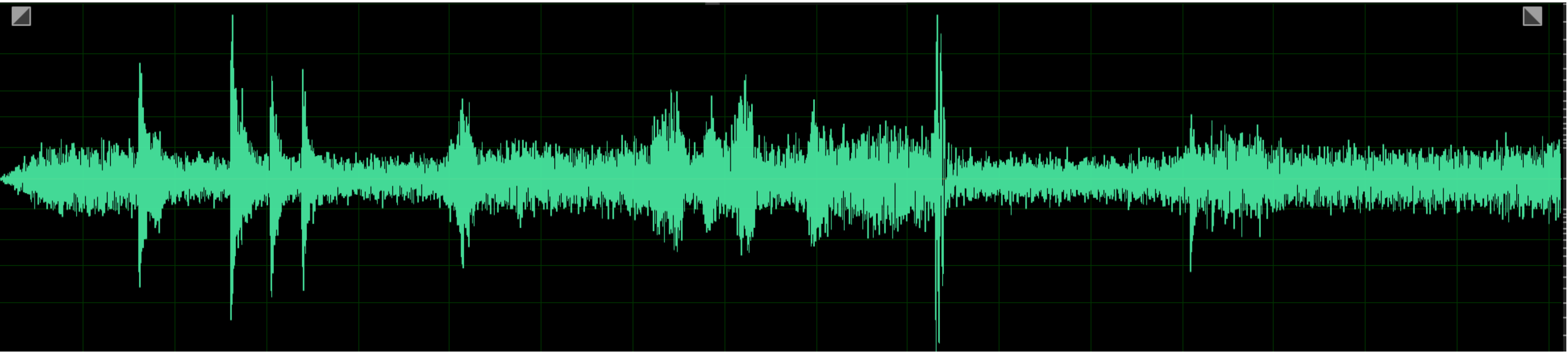
Messfehler eines GNSS- Positionssensors

- GNSS-Sensor in Ruhe
  - GNSS allgemeine Bezeichnung für Satellitennavigation wie GPS
- 3D Fehler (X, Y, Z, Farbe auch Z) übereinander geplottet
- Messfehler mit irregulärem zeitlichen Verlauf



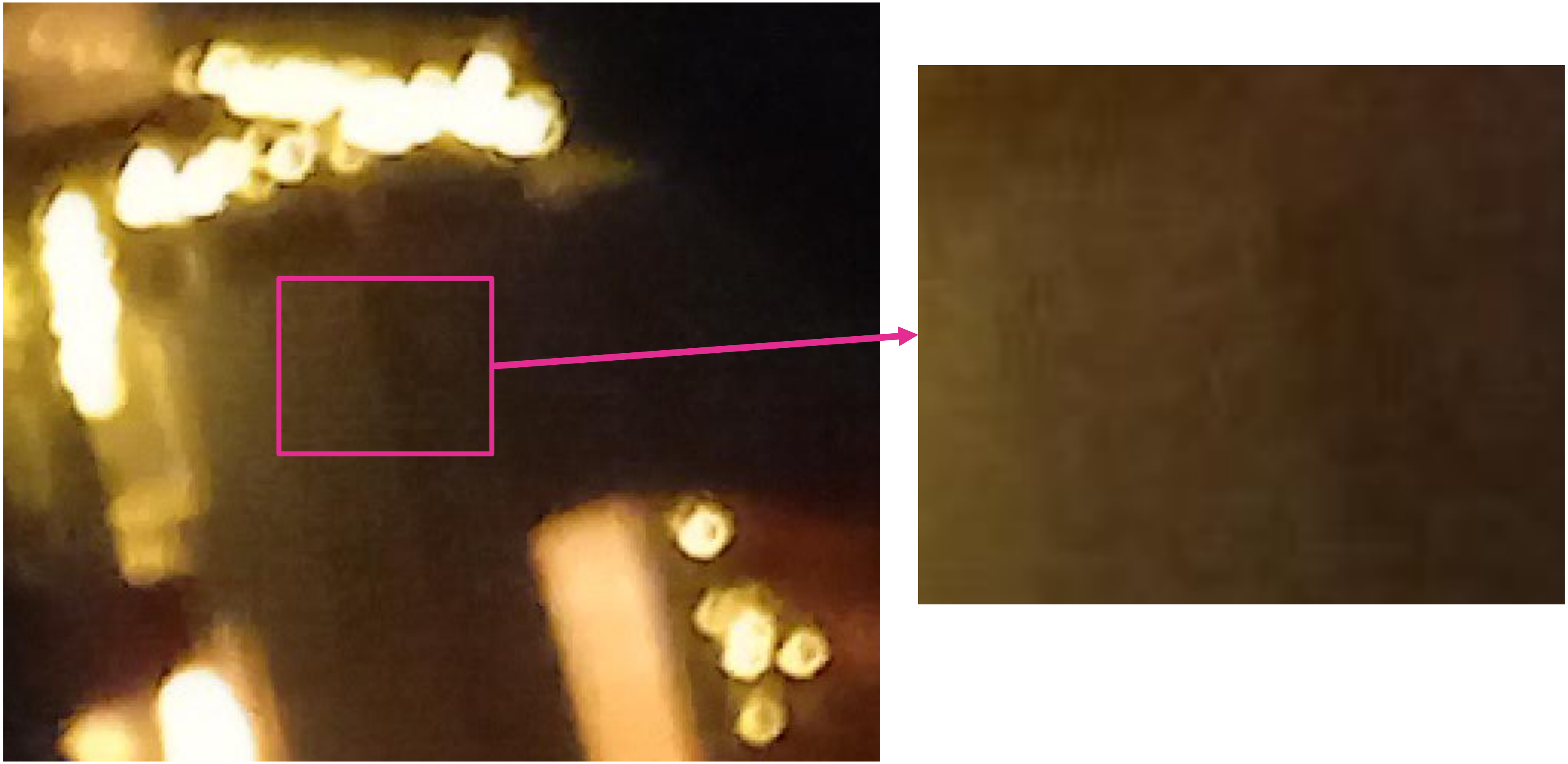
Messfehler eines Mikrofons

- Mikrofon in einem Ofen nimmt Sprache auf (→Sprachkommandos)
- Störungen durch Rauschen, Körperschall und schließen der Tür
- Nicht Messfehler im engeren Sinne, aber im weiteren



Messfehler einer Kamera

- Kamera fotografiert Balkon
- Dunkles Bild, starke Verstärkung, verwackelt, unscharf



Messfehler

- Alle Sensordaten enthalten Messfehler
- tlw. Fehler des Sensors im engeren Sinne
- tlw. Störungen durch äußere Einflüsse
  - eigentlich korrekt gemessen
  - aber ein Fehler zu was wir messen wollen
- Insgesamt: Differenz zwischen dem Messwert und dem was "eigentlich" gemessen werden sollte
  - alle nicht berücksichtigten Phänomene gehören zum Messfehler
- Wir wollen den Messvorgang als Zufallsexperiment sehen

Rekapitulation Stochastik

- *Zufallsexperiment*: Versuch, der unter genau festgelegten Versuchs-bedingungen durchgeführt wird und einen zufälligen Ausgang hat
  - https://de.wikipedia.org/wiki/Zufallsexperiment, 19.1.22
- *Ergebnis*: Ein Ausgang eines Zufallsexperimente
  - https://de.wikipedia.org/wiki/Ergebnis_(Stochastik), 19.1.22
  - legt alles zufällige in dem Experiment fest
  - bevor man das Zufallsexperiment durchführt sind viele Ergebnisse möglich und mehr oder weniger wahrscheinlich, danach gibt es ein Ergebnis
- *Ereignis:* Menge von Ergebnissen eines Zufallsexperiments, dem eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann,
  - https://de.wikipedia.org/wiki/Ereignis_(Wahrscheinlichkeitstheorie), 19.1.22

Rekapitulation Stochastik

- *Zufallsvariable*: eine Größe, deren Wert vom Zufall abhängig ist. Formal ist eine Zufallsvariable eine Zuordnungsvorschrift, die jedem möglichen Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Größe zuordnet.
  – https://de.wikipedia.org/wiki/Zufallsvariable, 19.1.22
- *Wahrscheinlichkeit*: ein allgemeines Maß der Erwartung für ein unsicheres Ereignis
  – - https://de.wikipedia.org/wiki/Wahrscheinlichkeit, 19.1.22
- *Bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B)*: Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Eintreten eines anderen Ereignisses B bereits bekannt ist.
  – https://de.wikipedia.org/wiki/Bedingte_Wahrscheinlichkeit, 19.1.22
  – $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$, $P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B)$
  – Passiert A zeitlich nach B: Wir sind in der Situation B, wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass A passiert?

Rekapitulation Stochastik

- Hier ist ein Beispiel für ein Zufallsexperiment, ergänze passend dazu Beispiele für die anderen Begriffe!
- *Zufallsexperiment*
  - Wir werfen zwei sechsseitige Würfel
  - 1. Würfel weiß, 2. Würfel rot
- *Ergebnis*
- *Ereignis*
- *Zufallsvariable*
- *Wahrscheinlichkeit*
- *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Rekapitulation Stochastik

- *Zufallsexperiment*
  - Wir werfen zwei sechsseitige Würfel
  - 1. Würfel weiß, 2. Würfel rot
- *Ergebnis*
  - (weiße Augenzahl, rote Augenzahl)
  - (3,1) wie abgebildet
- *Ereignis*
  - Pasch={(i, i) | i=1..6}
- *Zufallsvariable*
  - Augensumme S:(w, r) → w+r
- *Wahrscheinlichkeit*
  - Wahrscheinlichkeit für einen Pasch P(Pasch)
  - Wahrscheinlichkeit für Augensumme 4 P(S=4)
- *Bedingte Wahrscheinlichkeit*
  - Wahrscheinlichkeit einen Pasch gewürfelt zu haben, wenn die Augensumme 4 ist P(Pasch|S=4)

Rekapitulation Stochastik

- *Zufallsexperiment*
  - Wir werfen zwei sechsseitige Würfel
  - 1. Würfel weiß, 2. Würfel rot
- *Ergebnis*
  - (weiße Augenzahl, rote Augenzahl)
  - (3,1) wie abgebildet
- *Ereignis*
  - Pasch={(i, i) | i=1..6}
- *Zufallsvariable*
  - Augensumme S:(w, r) → w+r
- *Wahrscheinlichkeit*
  - Wahrscheinlichkeit für einen Pasch P(Pasch)
  - Wahrscheinlichkeit für Augensumme 4 P(S=4)
- *Bedingte Wahrscheinlichkeit*
  - Wahrscheinlichkeit einen Pasch gewürfelt zu haben, wenn die Augensumme 4 ist P(Pasch|S=4)

Aufgabe: Rechnet diese Wahrscheinlichkeiten aus.

Rekapitulation Stochastik

- Wahrscheinlichkeit für einen Pasch P(Pasch)
  - 6 Ergebnisse, jedes 1/36 → P(Pasch) = 1/6
- Wahrscheinlichkeit für Augensumme 4 P(S=4)
  - 3 Ergebnisse (1,3), (2,2), (3,1), jede 1/36
    → P (S=4) = 3/36 = 1/12
- Wahrscheinlichkeit einen Pasch gewürfelt zu haben, wenn die Augensumme 4 ist P(Pasch|S=4)
  - unter den S=4 Ergebnissen (1,3), (2,2), (3,1) ist eines ein Pasch, alle haben gleiche Wahrscheinlichkeit, also P(Pasch|S=4) = 1/3
  - formal rechnen
    P(Pasch|S=4) = P(Pasch ∩ S=4) / P(S=4)
    = 1/36 / (3/36) = 1/3
- P(S=4 | Pasch)
  - Es gibt 6 Päsche, einen mit Augensumme 4, alle haben 1/36 Wahrscheinlichkeit, also 1/6

	1	2	3	4	5	6
1	P		S			
2		PS				
3	S		P			
4				P		
5					P	
6						P

Messen als Zufallsexperiment

- Abstraktes Modell für Zusammenhang zwischen Wahrheit und Messung
- Messen als zweistufiges Zufallsexperiment
  1. Wahre Situation ergibt sich zufällig
  2. Messungen ergeben sich aus wahrer Situation und Zufall
  – wir kennen den Zusammenhang zwischen Wahrheit und Messung bis auf den zufälligen Anteil
- Zufallsvariable X ist die wahre Situation
  – meist beschrieben als Vektor von reellen Zahlen
  – ggf. Elemente einer endlichen Menge (z.B. wahre Objektklasse)
  – unbekannt aber gesucht
- Zufallsvariable Z ist/sind die Messung(-en)
  – meist beschrieben als Vektor von reellen Zahlen
  – bekannt Z=z, z die konkrete(n) Messung(-en)

Messen als Zufallsexperiment

- Zufallsvariable X ist die wahre Situation
- Zufallsvariable Z ist/sind die Messung(-en)
- Wir suchen…

Die wahrscheinlichste Wahrheit,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben.

$$\hat{x} = \arg\max_{x} P(X = x | Z = z)$$

Die wahrscheinlichste Wahrheit,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben.

$$\hat{x} = \arg\max_{x} P(X = x | Z = z)$$

Die wahrscheinlichste Wahrheit,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben.

$$\hat{x} = \arg\max_{x} P(X = x | Z = z)$$

Die wahrscheinlichste Wahrheit,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben.

$$\hat{x} = \underset{x}{\arg\max}\, P(X = x | Z = z)$$

Messen als Zufallsexperiment

Die wahrscheinlichste Wahrheit,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben.

$$\hat{x} = \arg\max_{x} P(X = x | Z = z)$$

Die wahrscheinlichste Wahrheit,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben.

$$\hat{x} = \arg\max_{x} P(X = x | Z = z)$$

Messen als Zufallsexperiment

- $\hat{x}$ nennt man "Schätzung"
- Bayes-Methode oder Bayes-Schätzung
- Maximum-a-posteriori-Schätzung
- Maximum-Likelihood-Schätzung (Unterschied im Detail)
- Macht SdV zu einem Optimierungsproblem

Die wahrscheinlichste Wahrheit,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben.

$$\hat{x} = \arg\max_{x} P(X = x | Z = z)$$

Messen als Zufallsexperiment

- Wir müssen P(X=x | Z=z) (indirekt) ausrechnen können für
  - eine hypothetisch gegebenes x (Maximum über alle x)
  - eine gegebenes z (Die Messung die wir konkret gemacht haben)
- Aber, wie rechnen wir das aus?

Die wahrscheinlichste Wahrheit,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben.

$$\hat{x} = \arg\max_{x} P(X = x | Z = z)$$

Rekap. Bayes Theorem

$$P(A)\,P(B|A) = P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Rekap. Bayes Theorem

- erlaubt die Ereignisse vor und hinter dem Konditionierungsstrich zu vertauschen

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

$$P(\overbrace{X = x}^{B}|\overbrace{Z = z}^{A}) = \frac{P(Z=z|X=x)\,P(X=x)}{\underbrace{P(Z=z)}}$$

$$\propto P(Z=z|X=x)\,P(X=x)$$

Bayes Theorem für Messungen

$$P(X = x|Z = z) \propto P(Z = z|X = x)P(X = x)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrheit x ist,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben,
ist proportional
zur Wahrscheinlichkeit das zu messen,
was wir gemessen haben, wenn die Wahrheit x wäre,
mal der Wahrscheinlichkeit,
dass die Wahrheit (a-priori) x ist.

Bayes Theorem für Messungen

$$P(X = x|Z = z) \propto P(Z = z|X = x)P(X = x)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrheit x ist,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben,
ist proportional
zur Wahrscheinlichkeit das zu messen,
was wir gemessen haben, wenn die Wahrheit x wäre,
mal der Wahrscheinlichkeit,
dass die Wahrheit (a-priori) x ist.

Universität Bremen

Bayes Theorem für Messungen

$$P(X = x|Z = z) \propto P(Z = z|X = x)P(X = x)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrheit x ist,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben,
ist proportional
zur Wahrscheinlichkeit das zu messen,
was wir gemessen haben, wenn die Wahrheit x wäre,
mal der Wahrscheinlichkeit,
dass die Wahrheit (a-priori) x ist.

Bayes Theorem für Messungen

$$P(X = x|Z = z) \propto P(Z = z|X = x)P(X = x)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrheit x ist,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben,
ist proportional
zur Wahrscheinlichkeit das zu messen,
was wir gemessen haben, wenn die Wahrheit x wäre,
mal der Wahrscheinlichkeit,
dass die Wahrheit (a-priori) x ist.

Bayes Theorem für Messungen

$$P(X = x|Z = z) \propto P(Z = z|X = x)P(X = x)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrheit x ist,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben,
ist proportional
zur Wahrscheinlichkeit das zu messen,
was wir gemessen haben, wenn die Wahrheit x wäre,
mal der Wahrscheinlichkeit,
dass die Wahrheit (a-priori) x ist.

Bayes Theorem für Messungen

$$P(X = x|Z = z) \propto P(Z = z|X = x)P(X = x)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrheit x ist,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben,
ist proportional
zur Wahrscheinlichkeit das zu messen,
was wir gemessen haben, wenn die Wahrheit x wäre,
mal der Wahrscheinlichkeit,
dass die Wahrheit (a-priori) x ist.

Bayes Theorem für Messungen

$$P(X = x|Z = z) \propto P(Z = z|X = x)P(X = x)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrheit x ist,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben,
ist proportional
zur Wahrscheinlichkeit das zu messen,
was wir gemessen haben, wenn die Wahrheit x wäre,
mal der Wahrscheinlichkeit,
dass die Wahrheit (a-priori) x ist.

Bayes Theorem für Messungen

$$P(X = x|Z = z) \propto P(Z = z|X = x)P(X = x)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrheit x ist,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben,
ist proportional
zur Wahrscheinlichkeit das zu messen,
was wir gemessen haben, wenn die Wahrheit x wäre,
mal der Wahrscheinlichkeit,
dass die Wahrheit (a-priori) x ist.

Bayes Theorem für Messungen

- $\propto$ ändert nichts daran, welches x maximal ist
- Kein Vorwissen über wahrscheinliche Zustände
  → P(X=x) konstant → fällt als Faktor weg → Maximum Likelihood

$$\hat{x} = \arg\max_x P(Z = z|X = x)P(X = x)$$

- Ist $P(Z = z|X = x)$ leichter zu berechnen, als $P(X = x|Z = z)$?
- Kausales Modell Ursache X → Wirkung Z ist einfacher!
- Ja! Wenn man die Wahrheit hypothetisch kennt (x), kann man ausrechnen, was die Sensoren messen sollten und wie wahrscheinlich es ist, dass sie z messen.

Zusammenfassung

$$\hat{x} = \arg\max_x P(X = x|Z = z)$$
$$= \arg\max_x P(Z = z|X = x)P(X = x)$$

- Bayes-Schätzung
- "Die wahrscheinlichste Wahrheit, gegeben, dass wir gemessen haben, was wir gemessen haben."
- Sensordatenverarbeitung (Sensorfusion) als Optimierungsproblem
- Benötigt Modelle für
  - a-priori Verteilung (oft uniform)
  - Wie wahrscheinlich ist es Z=z zu messen, wenn die Wahrheit x wäre