Prof. Dr. Daniel Neuen
Jens Schlöter

Wintersemester 2023/2024

Algorithmentheorie

Präsenzübung 4

Präsenzübung 4.1

Betrachte einen leeren Binary-Heap in Array-Repräsentation mit Array Größe $n = 8$:

(A) Führt die `Insert`-Operation für die Elemente $1, 10, 8, 14, 9, 15, 3, 7$ aus.

(B) Führt anschließend die `Delete`-Operation für die Elemente $8, 9, 3$ aus.

Präsenzübung 4.2

Sei $T = (V, E)$ ein einfacher, ungerichteter Graph mit n Knoten. Zeigt, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) T ist ein Baum.
(ii) T ist zusammenhängend und kreisfrei.
(iii) T hat $n - 1$ Kanten und ist kreisfrei.
(iv) T hat $n - 1$ Kanten und ist zusammenhängend.
(v) T ist maximal kreisfrei, d.h. T ist kreisfrei und $T \cup \{e\}$ enthält einen Kreis für jede Kante $e \notin E$.
(vi) T enthält einen eindeutig bestimmten Pfad zwischen jeweils zwei seiner Knoten.

Lösung: Wir zeigen die folgenden Äquivalenzketten, welche die Äquivalenz aller Aussagen implizieren:

1. $(ii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (ii)$
2. $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii)$

Beweis der ersten Kette:

- **Implikation** $(ii) \Rightarrow (v)$**:**
  - Per Widerspruch. Nehme an T sei zusammenhängend und kreisfrei, aber nicht maximal kreisfrei.
  - Dann gibt es Kante $e \notin E$, so dass $T \cup \{e\}$ *keinen* Kreis enthält.
  - Dann gibt es in T keinen Weg zwischen den Endpunkten von e.
  - Widerspruch zum Zusammenhang von T.

- **Implikation** $(v) \Rightarrow (vi)$**:**
  - Per Widerspruch. Nehme an T ist maximal kreisfrei, es gibt aber zwei Knoten u, v zwischen denen es keinen eindeutigen Pfad gibt.
  - Wenn es zwischen u und v *keinen* Pfad in T gibt, dann enthält $T \cup \{\{u, v\}\}$ keinen Kreis. Ein Widerspruch zur maximalen Kreisfreiheit von T.
  - Wenn es zwischen u und v *mehrere* Pfade in T gibt, dann ist dies ein Widerspruch zur Kreisfreiheit von T.
- **Implikation** $(vi) \Rightarrow (ii)$**:**
  - T enthält einen eindeutig bestimmten Pfad zwischen jeweils zwei seiner Knoten.
  - Da T einen Pfad zwischen jedem Knotenpaar enthält, muss T zusammenhängend sein.
  - Da es zwischen zwei Knoten jeweils höchstens einen Pfad gibt, muss T kreifrei sein.
  - T ist also zusammenhängend und kreisfrei.

Beweis der zweiten Kette:
Wir zeigen zunächst die folgenden Hilfsaussagen:

1. Bäume haben genau $n - 1$ Kanten.
   - Beweis per Induktion über $n := |V|$.
   - IA: Betrachte beliebigen Baum mit $|V| = 1$. Ein solcher Graph kann keine Kante haben (entweder weil wir einfache Graphen betrachten oder weil ein self-loop ein Kreis wäre).
   - IV: Nehme an, die Aussage gilt für Bäume mit n Knoten.
   - IS:
     - Betrachte einen Baum T mit $n + 1$ Knoten.
     - Sei v ein beliebiges Blatt dieses Baums.
     - Sei T' der Graph entstanden durch das Löschen von v (und allen anliegenden Kanten) aus T.
     - Dann ist T' ein Baum mit n Knoten.
     - Per IV hat T' dann genau $n - 1$ Kanten.
     - Da v ein Blatt ist, hat T genau eine Kante mehr als T'.
     - Also hat T insgesamt genau n Kanten.
2. Zusammenhängende Graphen haben mindestens $n - 1$ Kanten.
   - Per Widerspruch.
   - Nehme an T ist zusammenhängend mit weniger als $n - 1$ Kanten.
   - Dann ist T entweder bereits ein Baum oder wir können Kanten aus T entfernen bis wir einen Baum T' erreichen.
   - Dann ist entweder T oder T' ein Baum mit weniger als $n - 1$ Kanten.

- Widerspruch dazu, dass Bäume genau $n-1$ Kanten haben.

Beweis der Äquivalenzen:

- **Äquivalenz zwischen** (i) **und** (ii)**:**
  - Per Definition von Baum.
- **Implikation** $(ii) \Rightarrow (iv)$**:**
  - Sei T zusammenhängend und kreisfrei.
  - Dann ist T per Definition ein Baum und hat per erster Hilfsaussage genau $n-1$ Kanten.
- **Implikation** $(iv) \Rightarrow (iii)$**:**
  - Per Widerspruch.
  - Nehmen an, T ist zusammenhängend mit $n-1$ Kanten und hat einen Kreis C.
  - Sei $T' = T \setminus \{e\}$ für ein $e \in C$.
  - Dann hat T' nur $n-2$ Kanten und ist trotzdem noch zusammenhängend.
  - Ein Widerspruch zur zweiten Hilfsaussage.
- **Implikation** $(iii) \Rightarrow (ii)$**:**
  - Per Widerspruch.
  - Sei T kreisfrei mit $n-1$ Kanten, aber nicht zusammenhängend.
  - Wir fügen Kanten $e \notin E$ zu T hinzu, die keinen Kreis schließen, bis T zusammenhängend ist.
  - Das Resultat ist ein Baum T' mit mehr als $n-1$ Kanten.
  - Widerspruch zur ersten Hilfsaussage.

Präsenzübung 4.3

Zeige oder widerlege: wenn alle Kantenkosten eines zusammenhängenden, gewichteten, ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Gewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{R}_+$ paarweise verschieden sind, das heißt für alle $e_1, e_2 \in E$ mit $e_1 \neq e_2$ gilt $c(e_1) \neq c(e_2)$, so gibt es einen eindeutig bestimmten minimalen Spannbaum in G.