Mat3 Blatt 2

Gruppe: 7
Maarten Behn, Niklas Borchers, Emre Kilinc

5

a) Mindestens eines der drei Ereignisse (A, B, C) tritt ein

Die Warscheinlichkeit ist:
$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$P(C) = P(A \cap C) + P(\complement A \cap C) = P(A \cap C) + 0.15 = 0.4$
$\Rightarrow P(A \cap C) = 0.25$

$P(A) = P(A \cap \complement C) + P(A \cap C) = 0.25 + 0.25 = 0.5$

$P(B \cap C) = P(B \cap \complement A) + P(A \cap B \cap C) - P(\complement A \cap B \cap \complement C) = 0.3 + 0.1 - 0.2$

$P(A \cap B) = P(A) - P(\complement B \cap A) = 0.5 - 0.25 = 0.25$

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A\complement) = 0.25 + 0.3 = 0.55$

$\Rightarrow 0.5 + 0.55 + 0.4 - 0.25 - 0.25 - 0.2 + 0.1 = 0.85$

1/1

b) Genau zwei der drei Ereignisse (A, B, C) treten ein

Die Warscheinlichkeit ist:
$P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 3P(A \cap B \cap C)$
$= 0.25 + 0.25 + 0.2 - 3(0.1)$
$= 0.4$

1/1

c) Keines der drei Ereignisse (A, B, C) tritt ein

Die Warscheinlichkeit ist:
1 - Mindestens eines der drei Ereignisse (A, B, C) tritt ein.
$= 1 - a) = 1 - 0.85 = 0.15$ 1/1

d) Höchstens eines der drei Ereignisse (A, B, C) tritt ein

Die Warscheinlichkeit ist:
1 - Genau zwei der drei Ereignisse (A, B, C) treten ein - $P(A \cap B \cap C)$.
$= 1 - b) - 0.1 = 1 - 0.4 - 0.1 = 0.5$

1/1

6

$$p_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!} \quad k \in \{0, \ldots, n\}$$

a) Beweis mit Kontradiktion

Sei ein Ergebnis negativ.
Dann muss $\sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!}$ negativ sein.
Die Summe ist eine addtions folge mit abwechselnd $1, -1, 1, -1, \ldots$ im Zähler.
Die absolute Summe aller Brüche mit negativen Zähler ist daher größer als die absolute Summe aller Brüche mit positivem Zähler.
Da die Zähler durch $l!$ geteilt werden gilt $abs\left(\frac{(-1)^{(l-1)}}{(l-1)!}\right) \overset{>=}{\cancel{\leq}} abs\left(\frac{(-1)^l}{l!}\right)$.
Da die Summe mit einem positiven Zähler für $l = 0$ beginnt ist ein negativer Bruch immer kleiner als der der positive Bruch von $l - 1$.
Somit ist absolute Summe aller Brüche mit negativen Zähler kleiner als die absolute Summe aller Brüche mit positivem Zähler.
Dies weiderspricht der obrigen Aussage. 1,5/2

b)

Beobactungen

zum verstehen der Aufgabe

$n=0$

$$p_0^{(0)} = \frac{1}{0!}\left(\frac{(-1)^0}{0!}\right) = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{1}\right) = 1$$

$n=1$

$$p_0^{(1)} = \frac{1}{0!}\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!}\right) = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{1} + \frac{-1}{1}\right) = 0$$
$$p_1^{(1)} = \frac{1}{1!}\left(\frac{(-1)^0}{0!}\right) = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{1}\right) = 1$$
$$0+1=1$$

$n=2$

$$p_0^{(2)} = \frac{1}{0!}\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!}\right) = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{1} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
$$p_1^{(2)} = \frac{1}{1!}\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!}\right) = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{1} + \frac{-1}{1}\right) = 0$$
$$p_2^{(2)} = \frac{1}{2!}\left(\frac{(-1)^0}{0!}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

$n=3$

$$p_0^{(3)} = \frac{1}{0!}\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!}\right) = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{1} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$
$$p_1^{(3)} = \frac{1}{1!}\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!}\right) = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{1} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
$$p_2^{(3)} = \frac{1}{2!}\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{-1}{1}\right) = 0$$
$$p_3^{(3)} = \frac{1}{3!}\left(\frac{(-1)^0}{0!}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{6} = 1$$

$n=4$

$p_0^{(4)} = \frac{1}{0!}\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!}\right) = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{1} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{6} + \frac{1}{24}\right.$
$p_1^{(4)} = \frac{1}{1!}\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!}\right) = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{1} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{6}\right) = \frac{1}{3}$
$p_2^{(4)} = \frac{1}{2!}\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
$p_3^{(4)} = \frac{1}{3!}\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1} + \frac{-1}{1}\right) = 0$
$p_4^{(4)} = \frac{1}{4!}\left(\frac{(-1)^0}{0!}\right) = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{24}$
$\frac{3}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{24} = 1$

$p_k^{(n)} = 0$ wenn $k = n + 1$
$n - k = (n+1) - (k+1) \Rightarrow \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!} = \sum_{l=0}^{(n+1)-(k+1)} \frac{(-1)^l}{l!}$
$\frac{1}{k!} = \frac{1}{l!}$ wenn $l = k$

Zu zeigen

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^{(n)} = 1$$

Beweis

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\right)$$

Wir vertauschen die Summationsreihenfolge mit $m = k + \ell$
daher $\ell = m - k$ und $k = m - \ell$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{1}{k!}\cdot\frac{(-1)^\ell}{\ell!}$$

Diese Gleichheit ist nicht direkt. Beim nächsten Mal muss dies besser begründet werden.

$$= \sum_{m=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{m}\frac{1}{(m-\ell)!}\cdot\frac{(-1)^\ell}{\ell!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{m}\frac{(-1)^\ell}{\ell!(m-\ell)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{\ell=0}^{m} \frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} \cdot (-1)^{\ell}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} \cdot (-1)^{\ell}$$

Es ist allgemein bekannt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

und

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j = (1-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = 0, \\ 0 & \text{falls } m \geq 1. \end{cases}$$

Somit ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \cdot \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j = \frac{1}{0!} \cdot 1 = 1.$$

2/2

7

```
n <- 500000

dice1 <- sample(1:6, n, replace = TRUE)
dice2 <- sample(1:6, n, replace = TRUE)

sum <- dice1 + dice2

barplot(table(sum),
        main = "Augensummen (500.000 Simulationen)",
        xlab = "Augensumme",
        ylab = "Häufigkeit",
        col = "skyblue")
```

4/4

8

a)

Ja, denn $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{25}{24} > 1$

1/1

b)

Nein, z.B.
$\Omega = \{1, 2\}$
$A = \{1\} \rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$
$B = \{2\} \rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$
somit ist:
$A \cap B = \varnothing \rightarrow P(A \cap B) = 0$

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0 < P(A)$ 1/1

c)

Nein, z.B.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$
$A = \{1, 2\} \rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$
$B = \{1\} \rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$
somit ist:
$A \cap B = \{1\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1 > P(A)$ 1/1

d)

Ja, denn $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ und $P(A \cap B) \neq 0$

Aus P(A n B) = 0 folgt nicht unbedingt, dass A und B disjunkt sind.

0/1

14,5/16